А. Б. ВАСИЛЕВСКИЙ

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «ВЫШЭЙШАЯ ШКОЛА»

А. Б. ВАСИЛЕВСКИЙ

Методы решения задач

Допущено Министерством высшего и среднего специального образования БССР в качестве учебного пособия для студентов математических специальностей педагогических институтов

Издательство «Вышэйшая школа»
Минск 1974

51
В 19
УДК 51 (075.8)

Рецензенты:
Кафедра геометрии и методики математики Могилевского государственного педагогического института, доктор физико-математических наук профессор кафедры геометрии Ленинградского ордена Трудового Красного Знамени государственного педагогического института имени А. И. Герцена *А. Л. Вернер.*

В $\frac{0222—134}{М304(05)-74}$ 18—74

© Издательство «Вышэйшая школа», 1974 г.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие 3

Часть I. Алгебра и элементарные функции

Глава 1. Числа 5

§ 1. Делимость чисел —
§ 2. Определение целых корней уравнений и их систем 9
§ 3. Определение рациональных корней уравнений 11

Глава 2. Функции и графики 14

§ 1. Некоторые свойства функций —
§ 2. Определение экстремальных значений функций элементарными средствами 27
§ 3. Построение графиков сложных функций элементарными средствами 30
Упражнения к гл. 2 32

Глава 3. Тождества, уравнения, неравенства 36

§ 1. Методы доказательства тождеств —
§ 2. Методы доказательства неравенств 40
§ 3. Решение целых уравнений и неравенств 50
§ 4. Рациональные уравнения и неравенства 64
§ 5. Иррациональные уравнения и неравенства 72
§ 6. Показательные и логарифмические уравнения и неравенства 85
§ 7. Тригонометрические уравнения и неравенства 92
§ 8. О приближенных методах решения уравнений 104
§ 9. Эффективность различных методов решения неравенств 106

Глава 4. Разные задачи 109

§ 1. Алгебраический метод решения текстовых задач —
§ 2. Задачи на восстановление чисел 113
§ 3. Методы решения логических задач 119
Упражнения к гл. 4 128

Часть II. Геометрия

Глава 5. Общие вопросы решения геометрических задач 129

§ 1. Схемы решения конструктивных задач —
§ 2. Поиски путей решения задачи 134

Глава 6. Методы решения геометрических задач 154

§ 1. Методы геометрических преобразований —
§ 2. Метод пересечения фигур 163
§ 3. Задачи на изображение пространственных фигур 168
§ 4. Алгебраический метод решения геометрических задач 174
§ 5. Векторное решение геометрических задач 180
§ 6. Решение задач элементарной геометрии методом координат 184
§ 7. Многогранники и тела вращения 185
§ 8. Об исследовании решений задач 191
Упражнения к гл. 6 196
Ответы. Указания. Решения 206
Литература 236

ПРЕДИСЛОВИЕ

Книга представляет собой учебное пособие для студентов математических специальностей педагогических институтов.

В ней рассматриваются общие и частные методы решения тех математических задач, которые имеются в школьных учебниках и с которыми встречаются учащиеся на олимпиадах, конкурсных экзаменах и т. д.

Новыми программами для математических факультетов пединститутов предусматривается проведение на третьем и четвертом курсах практикума по решению задач. Этот практикум состоит из четырех частей (алгебра, геометрия, тригонометрия и решение конкурсных и олимпиадных задач).

Многие темы, непосредственно связанные с преподаванием математики в школе, изучаются в курсах алгебры, математического анализа и геометрии, поэтому практикум по алгебре, геометрии и тригонометрии включает только темы, недостаточно представленные в этих курсах и занимающие важное место в школьной математике. Имеется также в виду, что нужный для решения задач (на практикумах) теоретический материал студенты изучают в курсах высшей математики.

Новые школьные программы по математике включают ознакомление учащихся с такими важными понятиями, как производная, интеграл, геометрические преобразования, вектор, координатный метод и т. п. Существенным образом меняются методы изучения традиционного материала. Особое внимание уделяется изучению функций. В школьное преподавание вводится язык теории множеств. В связи с этим расширяется круг задач, доступных ученикам средней школы. Это, во-первых. Во-вторых, ученики знакомятся с более общими методами их решения. Поэтому в пособии особое внимание уделено функциональному подходу к решению задач как по алгебре, так и по геометрии. Показывается также, в каких случаях применение производной упрощает доказательство тождеств, доказательство и решение неравенств, а также исследование корней уравнений, содержащих параметры.

Графики функций используются не только для получения приближенного ответа, но главным образом для упрощения решений многих уравнений и неравенств, особенно тех, которые содержат параметры.

Обучение учащихся математической деятельности в процессе решения задач является неотъемлемой частью обучения, поэтому в книге много внимания уделяется комплексному использованию построений, измерений, вычислений и доказательств.

В конце каждого параграфа имеются упражнения для самостоятельного решения.

Часть сложных упражнений построена по такому принципу: некоторые задачи формулируются для частных случаев; рассмотрев их, мы находим метод, которым можно решить эти задачи и в общем виде. Большинство упражнений снабжено ответами, указаниями или решениями.

Задачи для этой книги заимствованы из различных журналов и пособий для поступающих в вузы (см. список литературы), причем многие из них подверглись существенной переработке.

Пособие может быть использовано также на семинарах по изучению методов решения математических задач, при проведении кружковых и факультативных занятий в школе.

Автор искренне благодарен *А. Л. Вернеру, Ф. А. Войтовичу, Н. М. Рогановскому* и *А. А. Столяру,* прочитавшим рукопись и давшим ценные советы по ее улучшению.

Глава 1. ЧИСЛА

§ 1. Делимость чисел[1]

Разложение на множители

Выражение с переменной раскладывается на множители. После этого показывается, что данное выражение и делитель имеют общие множители.

При решении задач этим методом часто находят применение формулы:

$$a^n - b^n = (a - b)\ (a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots + b^{n-1}), \qquad (1)$$

где n — любое натуральное число,

$$a^n + b^n = (a + b)\ (a^{n-1} - a^{n-2}b + \ldots + (-1)^{n-1}b^{n-1}), \qquad (2)$$

где $n = 2k + 1$; k — любое натуральное число.

Для того чтобы убедиться в справедливости формул (1) и (2), достаточно перемножить выражения, стоящие в скобках.

Пример 1. Доказать, что число $17^n - 11^n$ делится на 6 при любом натуральном n.

По формуле (1)

$$17^n - 11^n = (17 - 11)\ (17^{n-1} + 17^{n-2} \cdot 11 + 17^{n-3} \cdot 11^2 + \ldots + 11^{n-1}) = 6\,(17^{n-1} + 17^{n-2} \cdot 11 + 17^{n-3} \cdot 11^2 + \ldots + 11^{n-1}).$$

Выражение, стоящее в скобках, — целое положительное число. Теперь утверждение задачи очевидно.

Пример 2. Доказать, что число $2 \cdot 7^n + 1$ делится на 3 при любом натуральном n.

Очевидно,

$$2 \cdot 7^n + 1 = 2\,(7^n - 1) + 3.$$

Применив формулу (1), получаем

$$2\,(7^n - 1) + 3 = 2\,(7 - 1)\ (7^{n-1} + 7^{n-2} + \ldots + 1) + 3 = 3\,[4\ (7^{n-1} + 7^{n-2} + \ldots + 1) + 1].$$

Утверждение задачи доказано.

---

[1] Рассмотрим только те методы решения задач по теории делимости, которые по своим идеям близки к школьной математике.

Пример 3. Доказать, что число $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ делится на 7 при любом натуральном n.

Очевидно,

$$3^{2n+1} + 2^{n+2} = 9^n \cdot 3 + 2^n \cdot 4 = 3\,(9^n - 2^n) + 3 \cdot 2^n + 4 \cdot 2^n = \\ = 3\,(9^n - 2^n) + 7 \cdot 2^n.$$

Применив формулу (1), получаем

$$3\,(9^n - 2^n) + 7 \cdot 2^n = 3\,(9 - 2)\,(9^{n-1} + 9^{n-2} \cdot 2 + \\ + 9^{n-3} \cdot 2^2 + \ldots + 2^{n-1}) + 7 \cdot 2^n = 7\,[3\,(9^{n-1} + 9^{n-2} \cdot 2 + \\ + 9^{n-3} \cdot 2^2 + \ldots + 2^{n-1})] + 2^n.$$

Метод математической индукции

Математическая индукция — метод доказательства, основанный на следующем принципе:

1) некоторое свойство X верно при $k = 1$;

2) из предположения, что свойством X обладает какое-либо натуральное число $k > 1$, следует, что этим свойством обладает число $k + 1$.

Тогда свойство X имеет всякое натуральное число.

Пример 4. Доказать, что число вида $8^n + 6$ кратно 7 при любом целом $n \geqslant 1$.

При $n = 1$ утверждение задачи верно.

Допустим, что утверждение задачи справедливо при $n = k$ $(k > 1)$, т. е.

$$8^k + 6 = 7m, \tag{3}$$

где m — натуральное число.

Проверим теперь, что утверждение задачи верно и при $n = k + 1$, т. е. верно равенство

$$8^{k+1} + 6 = 7t, \tag{4}$$

где t — натуральное число.

Из равенства (3)

$$8^k = 7m - 6,$$

поэтому

$$8^{k+1} + 6 = 8 \cdot 8^k + 6 = 8\,(7m - 6) + 6 = \\ = 7 \cdot 8m - 42 = 7\,(8m - 6), \text{ т. е. } t = 8m - 6.$$

Таким образом, t — натуральное число и, следовательно, в силу равенства (4) утверждение задачи доказано.

Пример 5. Доказать, что при любом натуральном n выражение $3^{2n+2} + 2^{6n+1}$ делится на 11.

При $n = 1$ утверждение задачи очевидно:

$$3^{2\cdot 1+2} + 2^{6\cdot 1+1} = 209 = 11 \cdot 19.$$

Допустим, что это утверждение справедливо при $n = k$ $(k > 1)$,

$$\text{т. е. } 3^{2k+2} + 2^{6k+1} = 11\, m, \tag{5}$$

m — натуральное число.

Докажем, что утверждение задачи верно и при $n = k + 1$, т. е.

$$3^{2(k+1)+2} + 2^{6(k+1)+1} = 11\ p, \tag{6}$$

где p — натуральное число.

Из равенства (5) имеем

$$3^{2k+2} = 11\ m - 2^{6k+1}. \tag{7}$$

С учетом равенства (7) сумму $3^{2(k+1)+2} + 2^{6(k+1)+1}$ можно преобразовать к виду

$$3^{2(k+1)+2} + 2^{6(k+1)+1} = 3^2 \cdot 3^{2(k+1)} + 2^{6(k+1)+1} = 3^2\ (11\ m - 2^{6k+1}) + 2^{6(k+1)+1} = 3^2 \cdot 11\ m - 3^2 \cdot 2 \cdot 2^{6k} + 2^7 \cdot 2^{6k} = 3^2 \cdot 11\ m + 2^{6k}\,(2^7 - 2 \cdot 3^2) = 3^2 \cdot 11\ m + 2^{6k} \cdot 110 = 11\ (9m + 10 \cdot 2^{6k}).$$

Итак, показана верность равенства (6); $p = 9\,m + 10 \cdot 2^{6k}$.

Метод остатков

Пусть N_1 и N_2 — натуральные числа и $N = N_1 + N_2$. Если $N_1 = qn_1 + p_1$ и $N_2 = qn_2 + p_2$ (q, n_1, n_2, p_1, p_2 — натуральные числа), то $N = (qn_1 + p_1) + (qn_2 + p_2) = q\ (n_1 + n_2) + (p_1 + p_2)$. Поэтому число $N = N_1 + N_2$ делится без остатка на q, если сумма остатков p_1 и p_2 от деления N_1 и N_2 на q также делится на q, т. е. если $p_1 + p_2 = qk$ (k — натуральное число).

Пример 6. Доказать, что для любого натурального n число $2 \cdot 7^n + 1$ кратно 3.

Очевидно, $2 \cdot 7^n + 1 = 2\,(6 + 1)^n + 1$. После применения к $(6 + 1)^n$ формулы бинома Ньютона станет очевидным, что при делении $(6 + 1)^n$ на 3 получим в остатке 1. Следовательно, при делении $2 \cdot 7^n$ на 3 получаем в остатке 2. Итак, $2 \cdot 7^n + 1 = (3 \cdot m + 2) + 1 = 3\,(m + 1)$.

Пример 7. Доказать, что ни при каком натуральном n выражение

$$21^{2n+1} + 17^{2n+1} + 15 \text{ не делится на } 19.$$

Очевидно,

$$21^{2n+1} + 17^{2n+1} + 15 = (19 + 2)^{2n+1} + (19 - 2)^{2n+1} + 15.$$

Применив к выражениям $(19 + 2)^{2n+1}$ и $(19 - 2)^{2n+1}$ формулу бинома Ньютона, убеждаемся, что при делении $(19 + 2)^{2n+1}$ на 19

получаем в остатке 2^{2n+1}, а при делении $(19-2)^{2n+1}$ на 19 получаем в остатке $(-2)^{2n+1}$. Но $2^{2n+1}+(-2)^{2n+1}=0$. Поэтому при делении выражения $21^{2n+1}+17^{2n+1}+15$ на 19 получаем в остатке 15. Утверждение задачи доказано.

Доказательство методом от противного

Допускаем, что утверждение задачи неверно, т. е. данное выражение с переменной не кратно данному натуральному числу. Полученное в результате этого допущения противоречие доказывает справедливость утверждения задачи.

Пример 8. Доказать, что ни при каком целом n выражение n^2+3n+5 не делится на 121.

Допустим, что утверждение задачи неверно, т. е. существует такое целое число m, что

$$n^2+3n+5=121\,m. \tag{8}$$

Разрешив уравнение (8) относительно n, получаем

$$n^2+3n+(5-121\,m)=0,\quad n_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{11\,(44\,m-1)}}{2}.$$

По условию задачи n — целое число. Поэтому необходимо, чтобы $11\,(44\,m-1)=(11\,k)^2$, т. е. чтобы $44\,m-1=11\,k^2$ (k — целое число). Левая часть последнего равенства ни при каком значении m не кратна 11, поэтому уравнение (8) не имеет целочисленных решений.

Полученное противоречие и доказывает утверждение задачи.

Упражнения

1. Доказать, что $4\cdot6^n+5^n-4$ кратно 5 при любом целом $n\geqslant 1$.
2. Доказать, что при любом целом неотрицательном n:

а) $4^{2n+1}+3^{n+2}$ делится на 13; б) $5^{2n+1}+4^{n+2}$ делится на 21.

3. Доказать, что $5^{6k+5}+7^{6k}+6$ делится без остатка на 9 при любом натуральном k.
4. Доказать, что ни при каких целых положительных значениях n и k (при $k>1$) число $3^{n^k}+1$ не делится на 5.
5. Доказать, что для любого натурального n число $5^{2n-1}\cdot2^{n+1}+3^{n+1}\times\times2^{2n-1}$ делится на 19.
6. Установить, при каких натуральных значениях n число 11^n+7^n делится на 9.
7. Определить, при каких натуральных значениях n число 13^n+n делится на 12.

§ 2. Определение целых корней уравнений и их систем

Метод решения уравнения относительно одного из неизвестных

Данное уравнение с несколькими переменными $F(x, y, z, \ldots, u, v) = 0$ решается относительно одного из этих переменных, например, v. После этого исследуется функция $v = f(x, y, z, \ldots, u)$.

Пример 1. Решить в целых числах уравнение $xy = x + y$.

Из данного уравнения получаем

$$x = \frac{y}{y-1} = 1 + \frac{1}{y-1}, \quad y \neq 1.$$

Теперь понятно, что x будет целым только в том случае, если дробь $\frac{1}{y-1}$ — целое число. Но дробь $\frac{1}{y-1}$ — целое число, если $y-1=1$ или $y-1=-1$.

Следовательно, $y_1 = 2$, $y_2 = 0$, и мы получим два ответа: 1) $x_1 = 2$, $y_1 = 2$; 2) $x_2 = 0$, $y_2 = 0$.

Пример 2. Определить натуральные корни уравнения

$$17(xyzt + xy + xt + zt + 1) - 54(yzt + y + t) = 0.$$

Решим это уравнение относительно x:

$$17x = 54 - \frac{17(zt+1)}{yzt + y + t}.$$

Отсюда

$$54 - 17x = \frac{17}{y + \frac{t}{zt+1}}. \tag{1}$$

Правая часть уравнения (1) целая и положительная, так как y, z, t, x — натуральные числа.

Поэтому $x \leqslant 3$.

При $x = 1$ левая часть уравнения (1) равна 37, при $x = 2$ равно 20, при $x = 3$ равно 3.

Итак, теперь нужно решить в натуральных числах уравнения:

$$37 = \frac{17}{y + \frac{t}{zt+1}}, \tag{2}$$

$$20 = \frac{17}{y + \frac{t}{zt+1}}, \tag{3}$$

$$3 = \frac{17}{y + \dfrac{t}{zt+1}}. \qquad (4)$$

Из уравнения (2) получаем

$$37\,y + \frac{37t}{zt+1} = 17 \text{ или } \frac{37\,t}{zt+1} = 17 - 37\,y. \qquad (5)$$

Так как при $y \geqslant 1$ правая часть уравнения (5) отрицательна, то это уравнение может иметь натуральные решения только при $y = 0$.

Но уравнение

$$\frac{37t}{zt+1} = 17 \text{ или } t = \frac{17}{37 - 17z}$$

не имеет целых корней, так как t не равно целому числу при $z = 0,\ 1,\ 2$.

Аналогичным образом показывается, что и уравнение (3) не имеет натуральных корней.

Из уравнения (4) имеем

$$3y + \frac{3t}{zt+1} = 17 \text{ или } 17 - 3y = \frac{3t}{zt+1},\ 17 - 3y = \frac{3}{z + \dfrac{1}{t}}.$$

Очевидно, что

$$0 < \frac{3}{z + \dfrac{1}{t}} < 3$$

(z и t — натуральные числа). Поэтому $0 < 17 - 3y < 3$. Отсюда

$$\frac{14}{3} < y < \frac{17}{3},\ \text{т. е. } y = 5.$$

Тогда

$$\frac{3}{z + \dfrac{1}{t}} = 2,\ \text{т. е. } z + \frac{1}{t} = 1 + \frac{1}{2}.$$

Следовательно, $z = 1,\ t = 2$.

Окончательно получим $x = 3,\ z = 1,\ t = 2,\ y = 5$.

Разложение на множители выражений, входящих в уравнение

Пример 3. Доказать, что уравнение $x^3 - 5x^2 = 13$ не имеет решений в натуральных числах.

Преобразуем данное уравнение к виду

$$x \cdot x\,(x - 5) = 1 \cdot 1 \cdot 13. \qquad (6)$$

Уравнение (14) эквивалентно системе уравнений

$$\left.\begin{array}{l} x = 1, \\ x - 5 = 13. \end{array}\right\}$$

Но эта система уравнений противоречива. Утверждение задачи доказано.

Пример 4. Найти целые числа x и y такие, что $x > y > 0$ и

$$x^3 + 7y = y^3 + 7x. \qquad (7)$$

Преобразуем данное уравнение к виду

$$x^3 - y^3 = 7x - 7y \text{ или } (x - y)\ (x^2 + xy + y^2) = 7\ (x - y).$$

Но так как $x \neq y$, уравнение (7) эквивалентно уравнению

$$x^2 + y^2 + xy = 7 \text{ или } (x - y)^2 = 7 - 3xy.$$

Теперь ясно, что $7 - 3xy > 0$, т. е. $xy < 7 : 3$.

Но это возможно только в следующих случаях:

1) $x = 1,\ y = 2$;
2) $x = 2,\ y = 1$.

Окончательно получим $x = 2,\ y = 1$, так как по условию задачи $x > y$.

Упражнения

1. Доказать, что уравнение $x^2 + y^2 = 1971$ не имеет решений в целых числах.
2. Решить в целых положительных числах уравнение $36x - 49y = 2$.
3. Доказать, что уравнение $x^3 = 2 + 3y^2$ не имеет решений в целых числах.
4. Решить в целых положительных числах уравнение

$$x^4 + 2x^7y - x^{14} - y^2 = 7.$$

5. Найти все целые решения уравнения $x^2 - 6xy + 13y^2 = 100$.
6. Найти целые решения уравнения $x^2 - 6xy + 5y^2 = 121$.
7. Доказать, что уравнение $x^2 + y^2 + z^2 = 28$ не имеет решений в натуральных числах.
8. При каких отрицательных значениях a уравнение $x^3 + 5x^2 - 13 = a$ имеет решение в натуральных числах?

§ 3. Определение рациональных корней уравнений

Теорема о рациональных корнях уравнения

Теорема. Если несократимая дробь $\frac{p}{q}$ является корнем многочлена

$$M_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \qquad (1)$$

с целыми коэффициентами, то a_0 делится на p, а a_n — на q.

Доказательство. Пусть $x_0 = p:q$ — корень данного многочлена $M_n(x)$. Подставив в равенство (1) вместо x число $p:q$ и приведя его к общему знаменателю, получим

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} q + \ldots + a_1 p q^{n-1} + a_0 q^n = 0. \qquad (2)$$

Отсюда

$$p\,(a_n p^{n-1} + \ldots + a_1 q^{n-1}) = -a_0 q^n.$$

Так как числа q^n и p взаимно простые, то a_0 делится на p.

Теперь преобразуем уравнение (2) к виду

$$a_n p^n = -q\,(a_{n-1} p^{n-1} + \ldots + a_0 q^{n-1}).$$

Числа p и q взаимно простые, поэтому a_n делится на q.

Теорема доказана.

Покажем, как применяется эта теорема к отысканию рациональных корней целых функций с целыми коэффициентами.

Пример 1. Определить рациональные корни уравнения

$$x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 7x + 3 = 0.$$

Здесь $a_n = 1$, $a_0 = 3$. Поэтому рациональные корни данного уравнения следует искать среди чисел 1, —1, 3, —3.

Подстановкой этих чисел в данное уравнение убеждаемся, что только числа 1 и 3 являются его корнями.

Нужно только выяснить, не являются ли эти корни кратными. Для этого разделим левую часть уравнения на $(x-1)\,(x-3)$. По теореме Безу это можно сделать. Получим

$$\frac{x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 7x + 3}{(x-1)\,(x-3)} = x^2 - x + 1;\ x \neq 1,\ x \neq 3.$$

Отсюда

$$x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 7x + 3 = (x-1)\,(x-3)\,(x^2 - x + 1) = 0.$$

Уравнение $x^2 - x + 1 = 0$ не имеет целых корней, и корни $x_1 = 1$, $x_2 = 3$ являются однократными.

Пример 2. Определить рациональные корни уравнения

$$8x^4 + 4x^3 - 10x^2 - 9x - 2 = 0.$$

В этом уравнении $a_n = 8$, $a_0 = -2$. Число 8 делится на 1, —1, 2, —2, 4, —4, 8, —8, число —2 делится на 1, —1, 2, —2, поэтому рациональные корни уравнения нужно искать среди чисел:

$$2,\ -2,\ 1,\ -1,\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ -\frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ -\frac{1}{8}.$$

Подстановкой этих чисел в данное уравнение убеждаемся, что только $x = -0{,}5$ является его корнем.

По теореме Безу многочлен

$$8x^4 + 4x^3 - 10x^2 - 9x - 2$$

делится на $(x + 0{,}5)$.

Получаем

$$8x^4 + 4x^3 - 10x^2 - 9x - 2 = (x + 0{,}5)\ (8x^3 - 10x - 4) = 0.$$

Убеждаемся, что $x = -0{,}5$ является корнем уравнения

$$8x^3 - 10x - 4 = 0.$$

Следовательно, $x = -0{,}5$ является двукратным корнем данного уравнения.

Упражнения

1. Определить рациональные корни уравнения $x^3 + 3x^2 + 7x + 10 = 0$.
2. Определить рациональные корни уравнения $3x^3 - 8x^2 + 7x - 2 = 0$.
3. Доказать, что уравненне не имеет целых корней:

   1) $x^4 + 3x^3 - x + 2 = 0$; 2) $x^5 - 3x^4 + x^3 - 1 = 0$.

Глава 2. ФУНКЦИИ И ГРАФИКИ

§ 1. Некоторые свойства функций

Свойства непрерывных функций

В этом параграфе рассматриваются свойства функций, с помощью которых можно значительно упростить решения многих уравнений, неравенств, доказательство тождеств и других задач. Наиболее известные свойства функций формулируются без доказательств.

Свойство 1. *Сумма двух возрастающих (убывающих) функций есть функция возрастающая (убывающая).*

Свойство 2. *Произведение двух положительных возрастающих (убывающих) функций есть функция возрастающая (убывающая).*

Свойство 3. *Если функция $y = f(x)$ определена и непрерывна на $[a, b]$ и на концах этого промежутка принимает значения разных знаков, то существует такая точка $x_0 \in (a, b)$,* что $f(x_0) = 0$.

Пример 1. $y = x^3 + x^2$; $-5 \leqslant x \leqslant 5$ (рис. 1).

$y(-5) < 0$; $y(5) > 0$; $y(0) = 0$ и $y(-1) = 0$. Числа 0 и -1 принадлежат интервалу $(-5,5)$.

Свойство 4. *Если функция $y = f(x)$ определена, непрерывна и монотонна (в строгом смысле слова) на $[a, b]$ и на концах этого промежутка принимает значения разных знаков, то существует такая единственная точка $x_0 \in (a, b)$, что $f(x_0) = 0$.*

Пример 2. $y = \sin x$; $\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{3}{2}\pi$ (рис. 2).

$$y\left(\frac{\pi}{2}\right) > 0,\ y\left(\frac{3}{2}\pi\right) < 0.$$

Функция $y = \sin x$ на $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right]$ монотонно убывающая, поэтому существует единственная точка $x_0 = \pi$, в которой $\sin x = 0$.

Пример 3. Определить число отрицательных корней уравнения

$$x^3 - 3x^2 + 2 = 0.$$

Рассмотрим функцию $y = x^3 - 3x^2 + 2$ на $(-\infty, 0]$ (рис. 3).

Преобразуем ее к виду

$y = x^2(x-3)+2;\ y(0)=2>0.$

При уменьшении x от 0 до $-\infty$ фуккция $y_1 = x^2$ монотонно увеличивается от 0 до $+\infty$, а $y_2 = x-3$ монотонно уменьшается от -3 до $-\infty$.

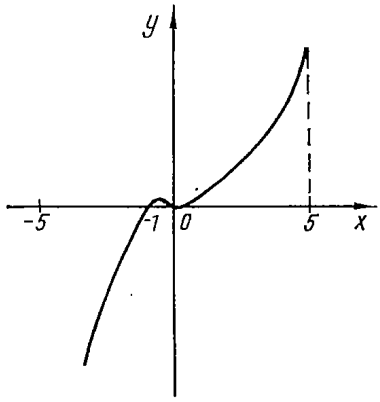


Рис. 1.

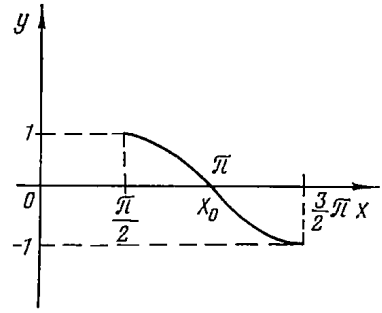


Рис. 2.

Поэтому $y = x^2(x-3)+2$ с уменьшением x от 0 до $-\infty$ монотонно изменяется от 2 до $-\infty$.

Следовательно, существует единственная точка $x_0 \in (-\infty, 0)$, которая является корнем данного уравнения.

Свойство 5. *Пусть функция $y = f(x)$ определена и непрерывна в некотором промежутке (замкнутом или нет, конечном или бесконечном). Если в двух точках $x = a$ и $x = b$ $(a < b)$ этого промежутка $f(x)$ принимает неравные значения: $f(a) = A$ и $f(b) = B$, то, каково бы ни было число $C \in (A, B)$, существует такая точка $c \in (a, b)$, что $f(c) = C$.*

Пример 4. Доказать, что уравнение

$$\frac{x^3+1}{x^2} = 10$$

имеет не менее двух положительных корней.

Рассмотрим функцию

$$y = \frac{x^3+1}{x^2}.$$

Преобразуем ее к виду

$$y = x + \frac{1}{x^2}.$$

Теперь ясно, что при $x \to 0$ и $x \to +\infty$ функция $y \to +\infty$.

Для доказательства утверждения задачи достаточно показать, что на интервале $(0, +\infty)$ существует такая точка x_0, что $y(x_0) < 10$.

Очевидно, что в качестве x_0 можно взять $x = 1$, так как $y(1) = 2 < 10$. Таким образом, положительные корни данного уравнения принадлежат интервалам $(0,1)$ и $(1, +\infty)$.

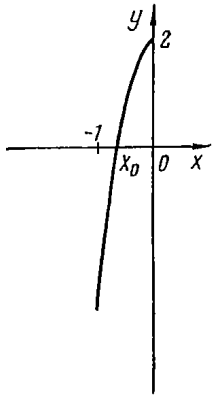


Рис. 3.

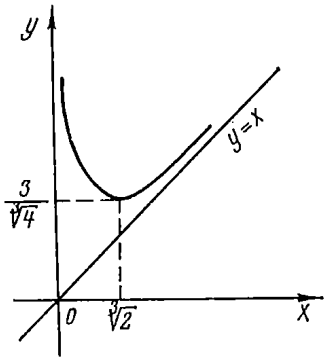


Рис. 4.

График функции $y = \dfrac{x^3 + 1}{x^2}$ (при $x > 0$) показан на рис. 4.

Свойство 6. *Пусть функция $y = f(x)$ определена, непрерывна и монотонна (в строгом смысле слова) на $[a, b]$.*

Пусть $f(a) = A$, $f(b) = B$. Каково бы ни было число $C \in [A, B]$, существует такая единственная точка $c \in [a, b]$, что $f(c) = C$.

Пример 5. Решить уравнение

$$\sqrt[4]{x-1} + \sqrt[4]{x+14} = 3.$$

Рассмотрим функции

$$y_1 = \sqrt[4]{x-1} \text{ и } y_2 = \sqrt[4]{x+14}.$$

Функция y_1 определена на $[1, +\infty)$, функция y_2 — на $[-14, +\infty)$. Поэтому областью определения функции $y = y_1 + y_2$ является $[1, +\infty)$.

Функции y_1 и y_2 возрастающие (подкоренные выражения с увеличением значения x увеличиваются, а следовательно, увеличиваются и корни четвертой степени). Поэтому на основании свойства 1 функция

$$y = \sqrt[4]{x-1} + \sqrt[4]{x+14}$$

является возрастающей на $[1, +\infty)$.

Наименьшего значения функция достигает при $x = 1$:

$$y_{\min} = y(1) = 0 + \sqrt[4]{15} = \sqrt[4]{15} < 3.$$

При $x \to +\infty$ $y \to +\infty$.

Следовательно, в силу свойства 6 на $[1, +\infty)$ существует единственный корень уравнения

$$\sqrt[4]{x-1} + \sqrt[4]{x+14} = 3.$$

Нетрудно заметить, что $x = 2$.

Свойство 7. *Если функция $y = f(x)$ определена, монотонно возрастает (убывает) и непрерывна на $[a, b]$, то на $[f(a), f(b)]$ существует обратная функция $y = \varphi(x)$, также монотонно возрастающая (убывающая) и непрерывная.*

Примечание. В этой теореме имеется в виду монотонная функция $f(x$ в строгом смысле слова.

Свойство 8. *Пусть функция $f(x)$ определена на некотором промежутке и во внутренней точке x_0 этого промежутка принимает наибольшее (наименьшее) значение. Если существует двусторонняя конечная производная $f'(x_0)$, то необходимо $f'(x_0) = 0$.*

Свойство 9. *Функция $f(x)$ удовлетворяет следующим требованиям: а) определена и непрерывна на $[a, b]$; б) существует конечная производная $f'(x)$, по крайней мере на (a, b); в) $f(a) = f(b)$. Тогда существует такая точка $x_0 \in (a, b)$, что $f'(x_0) = 0$.*

Свойство 10. *Функция $f(x)$ определена и непрерывна на $[a, b]$ и имеет конечную производную на (a, b). Для того чтобы $f(x)$ была на $[a, b]$ постоянной, необходимо и достаточно, чтобы $f'(x) = 0$, если $x \in (a, b)$.*

Пример 6. Доказать, что

$$\arccos x + \arccos\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3-3x^2}\right) = \frac{\pi}{3},$$

если $0{,}5 \leqslant x \leqslant 1$.

Рассмотрим функцию

$$f(x) = \arccos x + \arccos\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3-3x^2}\right) - \frac{\pi}{3}.$$

Эта функция определена и непрерывна на $[0{,}5;\ 1]$, так как на этом сегменте

$$3 - 3x^2 \geqslant 0 \text{ и } 0 < 0{,}5x + 0{,}5\sqrt{3-3x^2} \leqslant 1.$$

Проверяем справедливость утверждения задачи при каком-нибудь значении x из $[0{,}5;\ 1]$. Для простоты вычислений берем $x = 1$.

Получаем

$$\arccos 1 + \arccos\left(\frac{1}{2} + 0\right) = 0 + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3}.$$

Находим производную функции $f(x)$:

$$f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3-3x^2}\right)^2}}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \right.$$

$$\left. \times \frac{1}{2} \cdot \frac{-6x}{\sqrt{3-3x^2}}\right) = 0.$$

В силу свойства 10 тождество доказано.

Пример 7. Доказать тождество

$$2(\sin^6 x + \cos^6 x) - 3(\sin^4 x + \cos^4 x) + 1 = 0.$$

Рассмотрим функцию

$$y = 2(\sin^6 x + \cos^6 x) - 3(\sin^4 x + \cos^4 x) + 1.$$

Она определена на $(-\infty, +\infty)$. Кроме того, $y(0) = 0$.

Находим производную этой функции:

$$y' = 12\sin^5 x \cos x - 12\cos^5 x \sin x - 12\sin^3 x \cos x + 12\cos^3 x \sin x = 12\sin x \cos x\ (\sin^4 x - \cos^4 x - \sin^2 x + \cos^2 x) = 0.$$

На основании свойства 10 данное тождество доказано.

Свойство 11. *Функция $f(x)$ определена и непрерывна на $[a, b]$ и имеет конечную производную $f'(x)$ на (a, b). Для того чтобы $f(x)$ была на $[a, b]$ монотонно возрастающей (убывающей) в широком смысле, необходимо и достаточно, чтобы $f'(x) \geqslant 0$ ($\leqslant 0$) на (a, b).*

Свойство 12. *Функция $f(x)$ определена и непрерывна на $[a, b]$ и имеет конечную производную $f'(x)$ на (a, b). Для того чтобы $f(x)$ была монотонно возрастающей (убывающей) в строгом смысле, необходимо и достаточно, чтобы $f'(x) \geqslant 0$ ($\leqslant 0$) для $x \in (a, b)$ и $f'(x)$ не равнялась тождественно нулю ни в каком промежутке, составляющем часть $[a, b]$.*

Пример 8. Доказать, что если $a \geqslant 0$, то имеет место неравенство

$$a^3 + 3a^2 + 15 > 13a.$$

Рассмотрим функцию

$$y = f(a) = a^3 + 3a^2 - 13a + 15$$

на $[0, +\infty)$. Найдем ее производную

$$y'_a = 3a^2 + 6a - 13.$$

Определим корни уравнения $\varphi(a) = 3a^2 + 6a - 13 = 0$:

$$a_1 = -1 + \frac{4}{\sqrt{3}};\ a_2 = -1 - \frac{4}{\sqrt{3}},$$

второй корень — отрицательный. (На рис. 5 показан график функции $\varphi(a)$ для $a \geqslant 0$.)

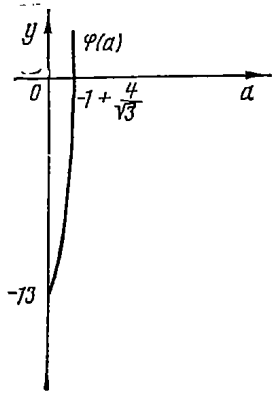


Рис. 5

Теперь ясно, что

$$\varphi(a) = f'(a) \leqslant 0, \text{ если } 0 \leqslant a \leqslant -1 + \frac{4}{\sqrt{3}};$$

$$\varphi(a) \geqslant 0, \text{ если } -1 + \frac{4}{\sqrt{3}} \leqslant a < +\infty.$$

На основании свойства 12 можно утверждать, что $f(a)$ монотонно убывает на $\left[0, -1 + \frac{4}{\sqrt{3}}\right]$ и монотонно возрастает на $\left[-1 + \frac{4}{\sqrt{3}}, +\infty\right)$.

Теперь для доказательства неравенства

$$a^3 + 3a^2 + 15 > 13a \quad (a \geqslant 0)$$

достаточно показать, что оно верно при $a_0 = -1 + \frac{4}{\sqrt{3}}$.

Так как $1 < -1 + \frac{4}{\sqrt{3}} < 1{,}4$, то $a^3 + 3a^2 + 15 > 19$, а $13a < 18{,}2$ (при всех $a \geqslant 0$).

Утверждение задачи доказано.

Пример 9. Доказать неравенство

$$3a^3 + 7b^3 \geqslant 9ab^2, \text{ если } a \geqslant 0,\ b \geqslant 0.$$

Рассмотрим функцию

$$y = f(a) = 3a^3 - 9ab^2 + 7b^3,$$

считая b параметром.

Находим ее производную

$$y' = f'(a) = 9a^2 - 9b^2 = 9(a^2 - b^2).$$

Уравнение

$$9(a^2 - b^2) = 0$$

имеет один корень, так как $a \geqslant 0$ и $b \geqslant 0$. Поэтому

$$f'(a) \leqslant 0, \text{ если } 0 \leqslant a \leqslant b,$$

$$f'(a) \geqslant 0, \text{ если } a \geqslant b.$$

Значит, на основании свойства 12 на промежутке $[0, b]$ функция $f(a)$ монотонно убывает, а на $[b, +\infty)$ — монотонно возрастает. Наименьшего значения $f(a)$ достигает при $a = b$. Но

$$f(b) = 3b^3 - 9b^3 + 7b^3 = b^3 \geqslant 0, \text{ если } b \geqslant 0.$$

Утверждение задачи доказано.

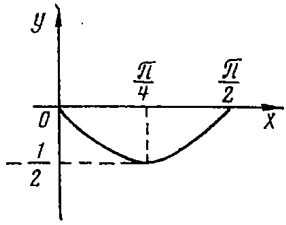


Рис. 6

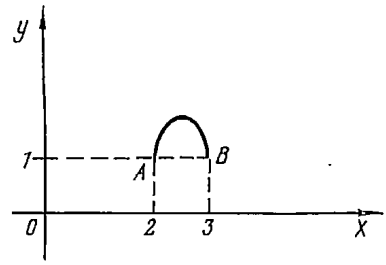


Рис. 7

Свойство 13. *Если первая из производных, не обращающихся в точке x_0 в нуль, есть производная нечетного порядка, то функция $f(x)$ не имеет в точке x_0 ни максимума, ни минимума. Если такой производной является производная четного порядка, то функция $f(x)$ в точке x_0 имеет максимум (минимум), если эта производная отрицательна (положительна).*

Пример 10. Определить корни уравнения

$$\sin^4 x + \cos^4 x = 1 \text{ на } \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

Исследуем функцию (рис. 6)

$$y = f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x - 1$$

на $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Найдем ее производную

$$y' = 4\sin^3 x \cos x - 4\cos^3 x \sin x =$$
$$= 4\sin x \cos x (\sin^2 x - \cos^2 x) = -\sin 4x.$$

Первая производная обращается в нуль в одной точке, принадлежащей $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, а именно в точке $x_0 = \frac{\pi}{4}$.

Найдем вторую производную $f(x)$:

$$y'' = -4\cos 4x;\ y''\left(\frac{\pi}{4}\right) = 4 > 0.$$

Следовательно, на $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ в точке $x_0 = \frac{\pi}{4}$ функция $f(x)$ достигает минимума. Но

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin^4\frac{\pi}{4} + \cos^4\frac{\pi}{4} - 1 = -0{,}5.$$

Значит, $f(x)$ монотонна на отрезках $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ и $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Теперь ясно, что исходное уравнение на интервале $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ решений не имеет.

Свойство 14. *Произведение выпуклой (вогнутой) функции на положительную постоянную есть выпуклая (вогнутая) функция.*

Свойство 15. *Произведение выпуклой (вогнутой) функции на отрицательную постоянную есть вогнутая (выпуклая) функция.*

Свойства 14 и 15 выпуклой (вогнутой) функции непосредственно следуют из ее определения.

Свойство 16. *Сумма двух выпуклых функций $f(x)$ и $\varphi(x)$ есть выпуклая функция.*

Доказательство. Пусть $\psi(x) = f(x) + \varphi(x)$ и x_1 и x_2 — произвольные точки из области определения функции $\psi(x)$.

По определению выпуклой непрерывной функции

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \geqslant \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2},$$

$$\varphi\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \geqslant \frac{\varphi(x_1) + \varphi(x_2)}{2}.$$

Сложив почленно эти неравенства, получим

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) + \varphi\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \geqslant \frac{[f(x_1) + \varphi(x_1)] + [f(x_2) + \varphi(x_2)]}{2}$$

или

$$\psi\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \geqslant \frac{\psi(x_1) + \psi(x_2)}{2}.$$

Свойство доказано.

Пример 11. Решить уравнение

$$\sqrt[4]{x-2}+\sqrt[4]{3-x}=1.$$

Функции $y_1=\sqrt[4]{x-2}$ и $y_2=\sqrt[4]{3-x}$ выпуклые.

Функция y_1 определена на $[2, +\infty)$, функция y_2 — на $(-\infty, 3]$, поэтому областью определения функции $y=y_1+y_2$ является $[2, 3]$.

Согласно свойству 16 функция $y=y_1+y_2$ является выпуклой на $[2, 3]$.

На концах этого сегмента она принимает значения, равные 1. График выпуклой функции $y=y_1+y_2$ (рис. 7) лежит выше хорды AB. Но хорда AB параллельна оси абсцисс, поэтому корнями данного уравнения являются только числа 2 и 3.

Свойство 17. *Если $\varphi(u)$ есть вогнутая и возрастающая функция, а $u=f(x)$ также вогнута, то и сложная функция $\varphi(f(x))$ будет вогнутой.*

Доказательство. Ввиду вогнутости функции $f(x)$ и возрастания функции $\varphi(u)$ имеем

$$\varphi\left[f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\right]\leqslant\varphi\left[\frac{1}{2}f(x_1)+\frac{1}{2}f(x_2)\right],$$

а в силу вогнутости функции $\varphi(u)$ последнее выражение не превосходит

$$\frac{1}{2}\varphi[f(x_1)]+\frac{1}{2}\varphi[f(x_2)].$$

Поэтому окончательно получается неравенство

$$\varphi\left[f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\right]\leqslant\frac{\varphi[f(x_1)]+\varphi[f(x_2)]}{2}.$$

Аналогичным образом доказываются и следующие свойства сложных функций.

Свойство 18. *Если $\varphi(u)$ вогнутая и убывающая функция, а $u=f(x)$ — выпуклая, то и сложная функция $y=\varphi[f(x)]$ вогнутая.*

Свойство 19. *Если $\varphi(u)$ выпуклая и возрастающая функция, а $u=f(x)$ — выпуклая, то и функция $y=\varphi[f(x)]$ выпуклая.*

Свойство 20. *Если $\varphi(u)$ выпуклая и убывающая функция, а $u=f(x)$ — вогнутая, то и функция $y=\varphi[f(x)]$ выпуклая.*

Свойства 17—20 сложных функций сведены в табл. 1.

Пример 12. Исследовать на выпуклость (вогнутость) функцию

$$y=\lg(-x^2+3x-2).$$

Квадратный трехчлен $-x^2+3x-2$ имеет корни 1 и 2. Поэтому $-x^2+3x-2>0$ на $(1, 2)$ и функция

$$y=\lg(-x^2+3x-2)$$

Таблица 1

	$\varphi(u)$	$u = f(x)$	$\varphi[f(x)]$
1	Вогнутая, возрастает	Вогнутая	Вогнутая
2	Вогнутая, убывает	Выпуклая	Вогнутая
3	Выпуклая, возрастает	Выпуклая	Выпуклая
4	Выпуклая, убывает	Вогнутая	Выпуклая

определена на (1, 2).

Функция $u = -x^2 + 3x - 2$ выпуклая. Функция $y = \lg u$ — возрастающая и выпуклая. Следовательно, и функция

$$y = \lg(-x^2 + 3x - 2)$$

выпуклая (см. п. 3 табл. 1).

Свойство 21. *Если $y = f(x)$ и $y = g(x)$ взаимно обратные функции (в соответствующих промежутках), то одновременно (табл. 2):*

Таблица 2

	$y = f(x)$	$y = g(x)$
1	Вогнутая, возрастает	Выпуклая, возрастает
2	Вогнутая, убывает	Вогнутая, убывает
3	Выпуклая, убывает	Выпуклая, убывает

Эти свойства взаимно обратных функций легко запомнить, если учесть, что их графики симметричны относительно биссектрис первого и третьего координатных углов.

Докажем утверждение, содержащееся в п. 1 табл. 2 (другие положения таблицы доказываются аналогичным образом).

Обозначим $f(x_1) = y_1$, $f(x_2) = y_2$.

Поэтому $x_1 = g(y_1)$ и $x_2 = g(y_2)$. По определению вогнутой функции

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leqslant \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

По свойству 7

$$g\left(\frac{y_1 + y_2}{2}\right) \geqslant g\left[f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)\right] = \frac{g(y_1) + g(y_2)}{2},$$

что и доказывает выпуклость функции $g(y)$.

Пример 12. Исследовать на выпуклость (вогнутость) функцию

$$y = \sqrt{x+2}.$$

Эта функция определена на $[-2, +\infty)$. Возведя обе части уравнения в квадрат, получаем

$$y^2 = x + 2,$$

отсюда $x = y^2 - 2$.

Функция $y = x^2 - 2$ определена на $[0, +\infty)$ и является обратной к функции

$$y = \sqrt{x+2}.$$

Функция $y = x^2 - 2$ вогнутая и взрастающая, поэтому данная функция выпуклая и возрастающая.

Свойство 22. *Вогнутая в промежутке* $[a, b]$ *функция* $f(x)$, *отличная от постоянной, не может достигать наибольшего значения внутри этого промежутка.*

Свойство 23. *Пусть функция* $f(x)$ *определена и непрерывна в промежутке* $[a, b]$ *и имеет в нем конечную производную* $f'(x)$. *Для того чтобы* $f(x)$ *была вогнутой на* $[a, b]$, *необходимо и достаточно, чтобы ее производная* $f'(x)$ *возрастала (в широком смысле).*

Свойство 24. *Пусть функция* $f(x)$ *определена и непрерывна вместе со своей производной* $f'(x)$ *на* $[a, b]$ *и имеет на* (a, b) *конечную производную* $f''(x)$. *Для выпуклости функции* $f(x)$ *на* $[a, b]$ *необходимо и достаточно, чтобы на* (a, b) *было* $f''(x) \leqslant 0$.

Пример 13. Исследовать на выпуклость (вогнутость) функцию

$$y = \ln \frac{x^2 - 3x + 2}{x + 1} \tag{1}$$

на $(2, +\infty)$.

Эта функция определена на множестве тех значений x, которые удовлетворяют неравенству

$$\frac{x^2 - 3x + 2}{x + 1} > 0 \text{ или } \frac{(x-2)(x-1)}{x+1} > 0. \tag{2}$$

Числитель левой части этого неравенства положителен на $(-\infty, 1)$ и $(2, +\infty)$; знаменатель — на $(-1, +\infty)$

Из рис. 8 видно, что решением неравенства (2) являются $(-1, +1)$ и $(2, +\infty)$.

Преобразуем уравнение (1) к виду

$$y = \ln\left(x - 4 + \frac{6}{x+1}\right).$$

Функция $y_1 = \dfrac{6}{x+1}$ вогнутая, поэтому и $u = x - 4 + \dfrac{6}{x+1}$ вогнутая функция (на $(2, +\infty)$).

Функция $y = \ln u$ выпуклая и возрастающая. С помощью табл. 1 нельзя ничего сказать о выпуклости (вогнутости) функции (1). Поэтому для решения задачи используем свойство 24:

$$y' = \frac{x+1}{x^2-3x+2} \cdot \frac{(2x-3)(x+1) - (x^2-3x+2)\cdot 1}{(x+1)^2} =$$

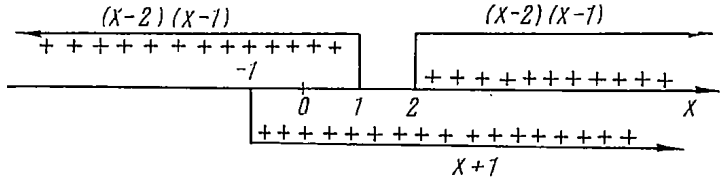


Рис. 8

$$= \frac{x^2+2x-5}{(x^2-3x+2)(x+1)};$$

$$y'' = \frac{(2x+2)(x^2-3x+2)(x+1) - (x^2+2x-5)[(2x-3)(x+1) + (x^2-3x+2)\cdot 1]}{[(x^2-3x+2)(x+1)]^2} =$$

$$= \frac{-x^4-4x^3+18x^2-16x-1}{(x-1)^2(x-2)^2(x+1)^2}.$$

Для выяснения знака второй производной $y''(x)$ на $(2, +\infty)$ исследуем функцию

$$y_2 = -x^4 - 4x^3 + 18x^2 - 16x - 1$$

на $(2, +\infty)$.

Очевидно,

$$y_2 < -x^4 - 4x^3 + 18x^2 - 16x = -x(x^3 + 4x^2 - 18x + 16).$$

Покажем, что функция

$$y_3 = x^3 + 4x^2 - 18x + 16$$

положительна на $(2, +\infty)$.

Найдем экстремальные точки функции y_3

$$y_3' = 3x^2 + 8x - 18.$$

Корни квадратного трехчлена не принадлежат $(2, +\infty)$. В точке $x = 2$ функция y_3 положительна: при $x \to +\infty$ $y_3 \to +\infty$, поэтому y_3 на $(2, +\infty)$ положительна.

Итак, на $(2, +\infty)$ вторая производная функции

$$y = \ln \frac{x^2 - 3x + 2}{x + 1}$$

отрицательна и, следовательно, эта функция на $(2, +\infty)$ выпуклая.

Свойство 25. *Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ определены и непрерывны вместе со своими производными $f'(x)$ и $\varphi'(x)$ на $[a, b]$ и имеют на (a, b) конечные производные $f''(x)$ и $\varphi''(x)$. Пусть $\psi(x) = f(x) \cdot \varphi(x)$. Тогда*

$$\psi'(x) = f'(x)\varphi(x) + f(x)\varphi'(x)$$

и

$$\psi''(x) = f''(x)\varphi(x) + 2f'(x)\varphi'(x) + f(x)\varphi''(x).$$

Отсюда следует табл. 3.

Таблица 3

	$y = f(x)$	$y = \varphi(x)$	$y = \psi(x)$
1	Положительная, возрастает, вогнутая	Положительная, возрастает, вогнутая	Положительная, возрастает, вогнутая
2	Положительная, убывает, вогнутая	Положительная, убывает, вогнутая	Положительная, вогнутая
3	Отрицательная, возрастает, выпуклая	Отрицательная, возрастает, выпуклая	Положительная, вогнутая
4	Отрицательная, убывает, выпуклая	Отрицательная, убывает, выпуклая	Положительная, вогнутая
5	Положительная, убывает, выпуклая	Положительная, возрастает, выпуклая	Положительная, выпуклая
6	Отрицательная, возрастает, вогнутая	Отрицательная, убывает, вогнутая	Положительная, выпуклая
7	Положительная, возрастает, выпуклая	Отрицательная, возрастает, вогнутая	Отрицательная, вогнутая
8	Положительная, убывает, выпуклая	Отрицательная, убывает, вогнутая	Отрицательная, вогнутая
9	Положительная, возрастает, вогнутая	Отрицательная, убывает, выпуклая	Отрицательная, выпуклая
10	Положительная, убывает, вогнутая	Отрицательная, возрастает, выпуклая	Отрицательная, выпуклая

Пример 14. Исследовать на выпуклость (вогнутость) функцию

$$y = x^4 - x^3 + x^2$$

на $(1, +\infty)$.

Преобразуем уравнение к виду

$$y = x^2(x^2 - x + 1).$$

Квадратный трехчлен $x^2 - x + 1$ не имеет действительных корней. Поэтому $x^2 - x + 1 > 0$ при всех действительных значениях x.

Таким образом, функции $y_1 = x^2$ и $y_2 = x^2 - x + 1$ вогнутые и положительные. Наименьшего значения функция y_2 достигает при $x = 0{,}5$, на $(1, +\infty)$ она возрастающая. Поэтому на $(1, +\infty)$ функция y вогнутая.

Упражнения

1. Функции $\varphi(x)$ и $f(x)$ положительные и выпуклые. Какими еще свойствами должны обладать эти функции, чтобы функция $y = f(x) : \varphi(x)$ была выпуклой?

2. Функция $\varphi(x)$ — отрицательная, $f(x)$ — положительная. Какими еще свойствами должны обладать эти функции, чтобы функция $y = f(x) \cdot \varphi(x)$ была выпуклой?

3. Функция $f(x)$ — отрицательная, выпуклая и возрастающая. Что можно сказать о функции $\varphi(x)$, если функция $y = f(x) : \varphi(x)$ выпуклая?

4. Функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ — выпуклые и отрицательные. Что еще можно сказать об этих функциях, если функция $y = f(x) : \varphi(x)$ вогнутая?

5. Исследовать на выпуклость (вогнутость) функцию $y = 1 : f(x)$.

6. Функция $f(x)$ положительная. Каким еще свойством обладает эта функция, если функция $y = \sqrt[n]{f(x)}$ выпуклая (n — натуральное число)?

7. Функция $y = [f(x)]^n$ выпуклая (n — натуральное число). Что можно сказать о функции $f(x)$?

8. Функция $y = (ax + b) \cdot f(x)$, где a и b — постоянные, — вогнутая; $f(x)$ — возрастающая и вогнутая. Что можно сказать о функции $y_1 = ax + b$?

9. Доказать, что функция $y = (12 - x)\sqrt{x - 4} + \sqrt{10 - x}$ вогнутая.

10. Исследовать на выпуклость и вогнутость функцию $y = \sqrt{-x^2 + x + 2}$.

11. Исследовать на выпуклость и вогнутость функцию

$$y = \frac{x^3}{x - 1}.$$

12. Определить промежутки, на которых функция $y = \dfrac{2}{(3 - x^2)(5 - x^2)}$ выпуклая.

13. Доказать, что на промежутке $(1, 2)$ функция $y = (x - 1)^{-1} - 2(x - 2)^{-1}$ вогнутая.

14. Доказать, что функция $y = \sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1}$ вогнутая.

§ 2. Определение экстремальных значений функций элементарными средствами

Исследование обратной функции

Аргумент аналитически выражается через функцию и устанавливается область существования полученной обратной функции. Эта область является множеством изменения исследуемой функции.

Определив множество изменений функции, можно указать ее наименьшее и наибольшее значения, если они существуют.

Поясним сказанное примером.

Пример 1. Определить область изменения функции

$$y = \frac{x^2 + x + 2}{x^2 - x + 2}.$$

Приведем данное уравнение к виду

$$(y - 1)x^2 - (y + 1)x + (2y - 2) = 0. \qquad (1)$$

Решив уравнение (1) относительно x, получаем

$$x = \frac{y + 1 \pm \sqrt{-7y^2 + 18y - 7}}{2(y - 1)}. \qquad (2)$$

Ясно, что x принимает действительные значения только тогда, если

$$-7y^2 + 18y - 7 \geqslant 0 \text{ или } 7y^2 - 18y + 7 \leqslant 0, \; y \neq 1. \qquad (3)$$

Решением неравенства (3) является $\left[\frac{9 - 4\sqrt{2}}{7}, \frac{9 + 4\sqrt{2}}{7}\right]$.

Подставляя в уравнение (1) вместо y число 1, убеждаемся, что $x = 0$. Поэтому y может быть равен 1.

Таким образом, область изменения заданной функции — $[y_1, y_2]$,

где $y_1 = \frac{9 - 4\sqrt{2}}{7}$, $y_2 = \frac{9 + 4\sqrt{2}}{7}$.

Абсциссы экстремальных точек находим из равенства (2):

$$x_1 = \frac{y_1 + 1 - 0}{2(y_1 - 1)} = -\sqrt{2}, \; x_2 = \frac{y_2 + 1 - 0}{2(y_2 - 1)} = \sqrt{2}.$$

Преобразование уравнения, с помощью которого задана функция

Пример 2. Исследовать на экстремум функцию

$$y = \frac{x^3 + 1}{x^2}. \qquad (4)$$

Функция определена на $(-\infty, 0)$ и $(0, +\infty)$. Перепишем уравнение (4) в виде

$$y = x + \frac{1}{x^2}.$$

На $(-\infty, 0)$ функции $y_1 = x$ и $y_2 = \frac{1}{x^2}$ — возрастающие, поэ-

тому и функция $y = x + \frac{1}{x^2}$ на $(-\infty, 0)$ возрастающая и на $(-\infty, 0)$ не имеет экстремумов.

Для исследования данной функции на $(0, +\infty)$ введем обозначение

$$x^3 + 1 = \frac{1}{z} \quad (0 < z < 1). \tag{5}$$

Тогда

$$x^2 = \sqrt[3]{\frac{(1-z)^2}{z^2}} \text{ и } y = \frac{1}{z}\sqrt[3]{\frac{z^2}{(1-z)^2}} = \sqrt[3]{\frac{2}{2z(1-z)^2}}.$$

Функция (4) имеет минимум, когда функция $\varphi(z) = 2z(1-z)^2$ имеет максимум.

Сумма $2z + (1-z) + (1-z) = 2$ не изменяется с изменением z. Поэтому функция $\varphi(z) = 2z(1-z)^2$ достигает максимума при $2z = 1 - z$, т. е. при $z = \frac{1}{3}$.

Из равенства (5) получаем, что функция (4) достигает минимума при $x = \sqrt[3]{2}$.

$$y(\sqrt[3]{2}) = \frac{3\sqrt[3]{2}}{2}.$$

Метод проб

В ряде случаев не только элементарными средствами, но и с помощью дифференциального исчисления нельзя определить точные значения координат экстремальных точек функции.

Вот пример такой функции:

$$y = \sqrt[4]{3-x} + \sqrt{2x-1}.$$

Она определена на [0,5; 3]. Найдем производную этой функции:

$$y' = \frac{-1}{4\sqrt[4]{(3-x)^3}} + \frac{2}{2\sqrt{2x-1}}.$$

Для определения экстремальных точек функции (6) нужно решить уравнение

$$\frac{-1}{4\sqrt[4]{(3-x)^3}} + \frac{1}{\sqrt{2x-1}} = 0,$$

которое после тождественных преобразований принимает вид

$$256x^3 - 2300x^2 + 6908x - 6911 = 0. \tag{7}$$

Получение точных значений действительных корней уравнения (7) сводится к громоздким вычислениям.

Однако часто нужно знать не точные, а приближенные (с заданной точностью) координаты экстремальных точек функции. В таких случаях проще исследовать на экстремум данную функцию (6), чем находить приближенные значения корней уравнения (7).

Пусть, например, нам нужно найти координаты экстремальных точек функции (6) с точностью до 0,1.

Функцию (6) можно рассматривать как сумму двух функций:

$$y_1 = \sqrt[4]{3-x}, \quad y_2 = \sqrt{2x-1}.$$

На [0,5; 3] эти функции выпуклые. Поэтому и их сумма — функция y — также выпуклая.

Функция y_1 — убывающая, y_2 — возрастающая, поэтому можно утверждать, что функция y или монотонная на [0,5; 3], или имеет одну экстремальную точку на (0,5; 3). Очевидно, в этой точке функция достигает максимума.

Вычисляем (с помощью таблиц):

$$y(0{,}5) \approx 1{,}257; \quad y(3) \approx 2{,}236;$$
$$y(1) \approx 2{,}189; \quad y(2) \approx 2{,}732.$$

Отсюда ясно, что на (0,5; 3) существует точка x_0, в которой данная функция (6) достигает наибольшего значения.

Допустим, что $x_0 = 2$. Но $y(1{,}5) \approx 2{,}523$, $y(2{,}5) \approx 2{,}841$.

Теперь ясно, что $2 < x_0 < 3$.

Далее, $y(2{,}6) \approx 2{,}844$, поэтому $2{,}5 < x_0 < 3$. Но $y(2{,}7) \approx 2{,}838$.

Итак, $2{,}5 < x_0 < 2{,}7$.

Следовательно, $x_0 \approx 2{,}6$ и $y(x_0) \approx 2{,}844$.

Упражнения

Исследовать на экстремум функции: 1. $y = x^5 - 15x^3$. 2. $y = \dfrac{-2x+3}{x^2+6x+10}$. 3. $y = -\cos^2 x - 5\sin x + 7$. 4. $y = x^3 - 9x^2 + 15x$. 5. $y = 2^{|x|} + |x| - x^2$ на $[-0{,}5;\ 0{,}5]$. 6. $y = \dfrac{1-x}{x^4 - x^5 + 1}$ на $[0, 1]$.

§ 3. Построение графиков сложных функций элементарными средствами*

Построение графиков сложных функций

Нужно построить график функции $y = F(\varphi(x))$. Для этого сначала строим графики функций $y = \varphi(x)$ и $y = F(x)$ (рис. 9).

* Материал для этого параграфа заимствован из статьи Г. С. Запорожцева «Об одном способе построения графиков сложных функций» («Математика в школе», 1967, № 2).

График функции $y = \varphi(x)$ ставит в соответствие точке $A(x, 0)$ точку $B[x; \varphi(x)]$. Отметим на оси Ox значение ординаты точки $B(y = \varphi(x))$. Получаем точку $C[\varphi(x); 0]$.

График функции $y = F(x)$ ставит в соответствие точке $C[\varphi(x); 0]$ точку $D[\varphi(x); F(x)]$.

Проводим через D прямую DM, параллельную оси Ox. На пересечении DM с прямой AB получим точку $M\{x, F[\varphi(x)]\}$. Точка

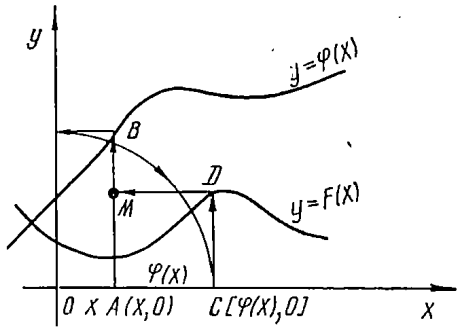


Рис. 9

M принадлежит графику сложной функции $y = F(\varphi(x))$. Аналогично строятся остальные точки графика этой функции.

Поясним сказанное примером.

Пример. Построить график функции

$$y = \log_2(x^2 + 2x + 3).$$

Здесь

$$y = \varphi(x) = x^2 + 2x + 3, \quad y = F(x) = \log_2 x.$$

Функция $\varphi(x)$ не имеет действительных корней, поэтому $\varphi(x) > 0$ на $(-\infty, +\infty)$ и функция $y = \log_2(x^2 + 2x + 3)$ определена на $(-\infty, +\infty)$.

Наименьшее значение функция $\varphi(x)$ принимает в точке $x = -1$ (абсцисса вершины параболы $y = x^2 + 2x + 3$). $\varphi(-1) = 2$. Поэтому областью изменения функции $y = \log_2(x^2 + 2x + 3)$ является $[1, +\infty)$.

Для построения графика данной функции используем графики функций $y = \varphi(x) = x^2 + 2x + 3$ и $y = F(x) = \log_2 x$ (рис. 10).

График функции $\varphi(x)$ симметричен относительно прямой $x = -1$. Поэтому и график данной функции симметричен относительно этой прямой.

Следовательно, описанным выше способом достаточно построить график функции $y = \log_2(x^2 + 2x + 3)$ только на $[-1, +\infty)$.

Упражнения

Построить графики функций:

1. $y = \dfrac{1}{x^2 - 1}$.
2. $y = \log_2 |x - 3|$.
3. $y = \sin x^2$.
4. $y = \sin \dfrac{1}{x}$.

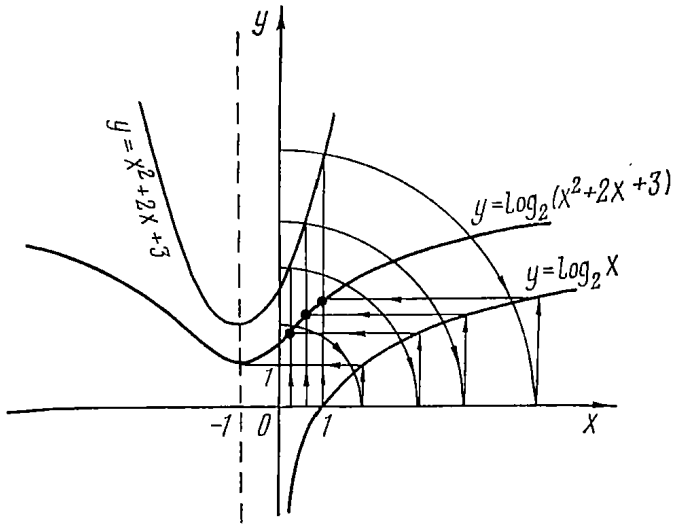


Рис. 10

5. $y = \log_2 \cos x$.
6. $y = 2^{\cos x}$.
7. $y = \sin^6 x + \cos^6 x$.

Упражнения к гл. 2

1. Построить график уравнения $x^2 + y^2 = 4$. Является ли построенная кривая графиком какой-либо функции $y = f(x)$?

2. На рис. 11 — 20 изображены графики функций $y = f(x)$, заданных уравнениями:

1) $y = (x - 1) \cdot |x - 2|$; 2) $y = \dfrac{x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1}$; 3) $y = \dfrac{1}{1 + x^2}$;

4) $y = \sqrt{x - 1} - 2$; 5) $y = \sqrt{\dfrac{x - 1}{x + 1}}$; 6) $y = \sqrt{2(x + |x - 2|)}$;

7) $y = 2^{x - |x|}$; 8) $y = \arcsin \dfrac{1}{x}$; 9) $y = -\sqrt{y^2 + 1} + 3^x$;

10) $y = 2^{x^2 - 3x + 2}$.

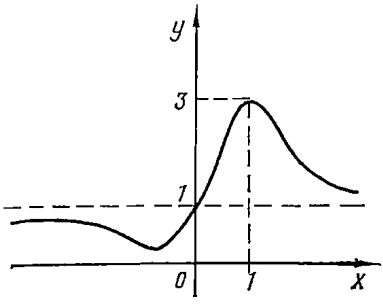


Рис. 11

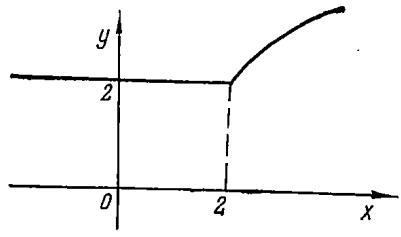


Рис. 12

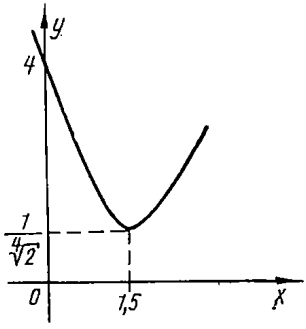


Рис. 13

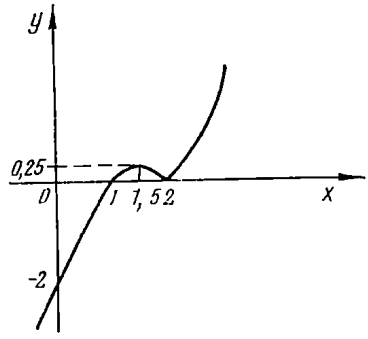


Рис. 14

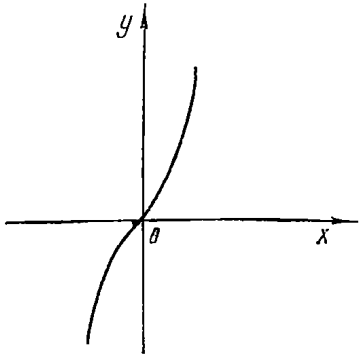


Рис. 15

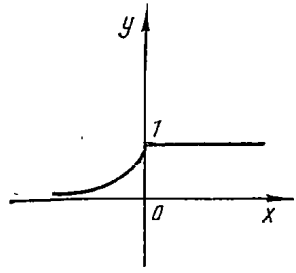


Рис. 16

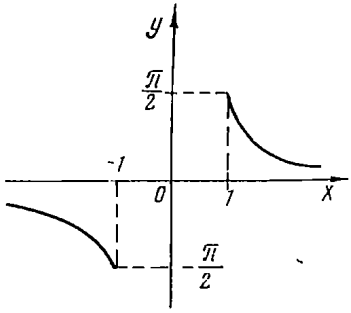


Рис. 17

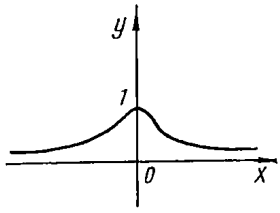


Рис. 18

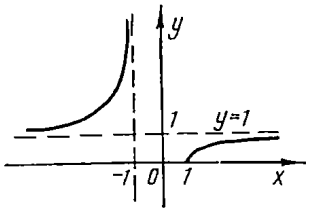


Рис. 19

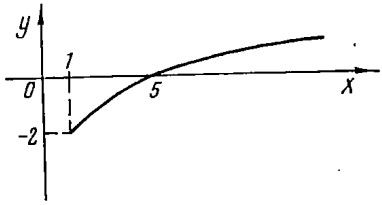


Рис. 20

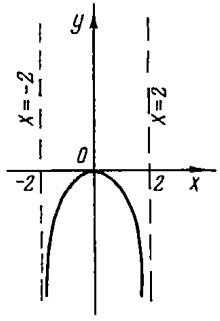


Рис. 21

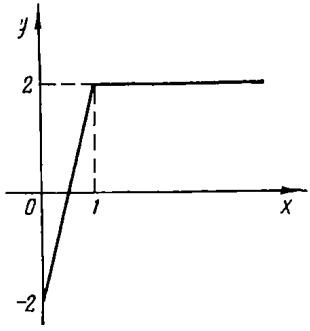


Рис. 22

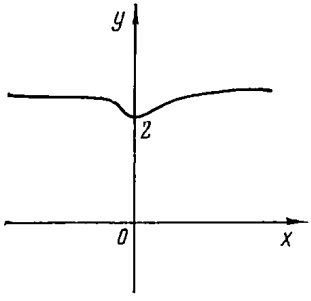


Рис. 23

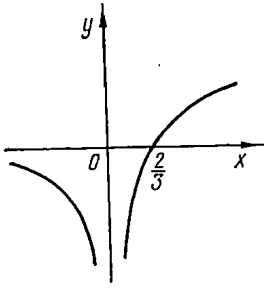


Рис. 24

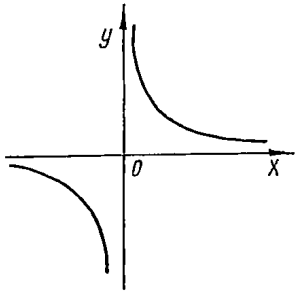


Рис. 25

Указать, на каком рисунке изображен график каждой из этих функций. По графикам этих функций рассказать об их свойствах.

3. При построении графиков функции:

1) $y = \log_2(1 - x^2)$; 2) $y = \dfrac{\log_2 x^2}{|\log_2 x|}$;

3) $y = 2^x + \left(\dfrac{1}{2}\right)^x$; 4) $y = \dfrac{3x - 2}{5x^2}$; 5) $y = x + \dfrac{4}{x}$

были допущены некоторые ошибки (рис. 21 — 25). Указать, в чем сущность этих ошибок.

4. Построить графики функций $y = \log_2 x$ и $y = 2$ (в одной и той же прямоугольной системе координат). Заштриховать ту часть координатной плоскости, точки которой удовлетворяют системе неравенств:

$$\left.\begin{array}{l} y > \log_2 x, \\ y < 2. \end{array}\right\}$$

5. Построить графики функции $y = \log_2 x$, $y = 4^x$, $x = 1$ (в одной и той же системе координат). Заштриховать ту часть координатной плоскости, точки которой удовлетворяют системе неравенств:

$$\left.\begin{array}{l} y > \log_2 x, \\ y < 4^x, \\ x < 1. \end{array}\right\}$$

6. Какое требование нужно наложить на функцию $y = f(x)$, для того чтобы кривая, симметричная графику функции $y = f(x)$ относительно прямой $y = x$, была графиком некоторой функции?

7. Построить график функции, которая на отрезке [1, 3] имеет минимум, равный 4.

8. График некоторой функции полностью расположен в верхней части координатной плоскости. Может ли быть такая функция нечетной?

9. Привести примеры функций, определенных на сегменте [0, 1].

10. Привести примеры функций, заданных на $(-\infty, +\infty)$.

11. Привести примеры функций, не определенных на промежутке [0, 1].

12. Некоторая функция задана на $(-1, 2)$ и принимает только положительные значения. Может ли она быть четной?

13. Привести пример функции, определенной только в одной точке $x = 1$.

14. Привести примеры функций, областью изменения которых является интервал $(-1, 1)$.

15. Привести примеры функций, областью изменения которых является только одна точка.

16. В каких точках не определена дробно-линейная функция?

17. Пусть $f(x)$ — линейная функция. В каких точках не определена функция $y = \sqrt[2n]{f(x)}$?

18. Функция $f(x)$ — квадратичная. Корни ее равны x_1 и x_2. Найдите область определения функции $y = [f(x)]^x$.

Глава 3. ТОЖДЕСТВА, УРАВНЕНИЯ, НЕРАВЕНСТВА

§ 1. Методы доказательства тождеств

Тождественное преобразование отдельных частей данного выражения

Пример 1. Доказать тождество

$$\frac{\sqrt{m+x}+\sqrt{m-x}}{\sqrt{m+x}-\sqrt{m-x}}=\frac{1}{n},$$

если

$$x=\frac{2mn}{n^2+1},\quad m>0,\quad 0<n<1.$$

Упростим сначала левую часть равенства:

$$\frac{\sqrt{m+x}+\sqrt{m-x}}{\sqrt{m+x}-\sqrt{m-x}}=\frac{(\sqrt{m+x}+\sqrt{m-x})^2}{(\sqrt{m+x})^2-(\sqrt{m-x})^2}=$$

$$=\frac{2m+2\sqrt{m^2-x^2}}{(m+x)-(m-x)}=\frac{2(m+\sqrt{m^2-x^2})}{2x}=\frac{m+\sqrt{m^2-x^2}}{x}.$$

Далее,

$$m^2-x^2=m^2-\frac{4m^2n^2}{(n^2+1)^2}=m^2\left[1-\frac{4n^2}{(n^2+1)^2}\right]=$$

$$=m^2\frac{(n+1)^2(1-n)^2}{(n^2+1)^2}.$$

Так как $0<n<1$ и $m>0$, то

$$\sqrt{m^2-x^2}=m\frac{(n+1)(1-n)}{n^2+1}=\frac{m(1-n^2)}{n^2+1}.$$

Находим

$$m+\sqrt{m^2-x^2}=m+\frac{m(1-n^2)}{n^2+1}=m\left[1+\frac{1-n^2}{n^2+1}\right]=$$

$$=m\frac{2}{n^2+1}.$$

Следовательно,

$$\frac{m+\sqrt{m^2-x^2}}{x}=\frac{\frac{2m}{n^2+1}}{\frac{2mn}{n^2+1}}=\frac{1}{n},$$

что и требовалось доказать.

Применение производной

Известно, что если на отрезке $[a, b]$ функция $f(x)$ имеет производную, причем для всех точек этого отрезка $f'(x)=0$, то $f(x)$ постоянна на отрезке $[a, b]$.

Пример 2. Доказать тождество

$$2(\sin^6 x+\cos^6 x)-3(\sin^4 x+\cos^4 x)+1=0.$$

Будем рассматривать левую часть равенства как функцию от x: $f(x)=2(\sin^6 x+\cos^6 x)-3(\sin^4 x+\cos^4 x)+1$. Вычислим $f'(x)$:

$$f'(x)=12\sin^5 x\cos x-12\cos^5 x\sin x-12\sin^3 x\cos x+12\cos^3 x\sin x=$$
$$=12\sin x\cos x[(\sin^2 x-\cos^2 x)(\sin^2 x+\cos^2 x)-(\sin^2 x-\cos^2 x)]=0.$$

Следовательно, $f(x)=\text{const}$ на $(-\infty, +\infty)$. Но $f(0)=0$, поэтому $f(x)=0$ на $(-\infty, +\infty)$.

Утверждение задачи доказано.

Применение теоремы о многочлене, тождественно равном нулю, к доказательству тригонометрических тождеств[1]

Теорема 1. *Если многочлен $M(\sin x, \cos x)$, однородный относительно $\sin x$ и $\cos x$ степени n, обращается в нуль при $n+1$ значениях аргумента x, отличающихся друг от друга на числа, не кратные π, то $M(\sin x, \cos x)\equiv 0$.*

Доказательство.

$$M(\sin x, \cos x)=a_n\sin^n x+a_{n-1}\sin^{n-1}x\cos x+\ldots+$$
$$+a_1\sin x\cos^{n-1}x+a_0\cos^n x. \qquad (1)$$

Пусть $M(\sin\alpha_j, \cos\alpha_j)=0$, где $x=\alpha_j$ $(j=1, 2, \ldots, n+1)$, причем корни отличны не на π.

$$M(\sin\alpha_j, \cos\alpha_j)=a_n\sin^n\alpha_j+a_{n-1}\sin^{n-1}\alpha_j\cos\alpha_j+\ldots+$$
$$+a_1\sin\alpha_j\cos^{n-1}\alpha_j+a_0\cos^n\alpha_j=0. \qquad (2)$$

---

[1] Материал для этой части параграфа заимствован из статьи: Э. А. Ясиновый. «Применение теоремы о многочлене, тождественно равном нулю, к доказательству тригонометрических тождеств» («Математика в школе», 1959, № 2).

Рассмотрим случай, когда ни одно из чисел $\alpha_j \neq \frac{\pi}{2}(2k+1)$.

Разделив обе части равенства (2) на $\cos^n\alpha_j$, получаем:

$$a_n \operatorname{tg}^n\alpha_j + a_{n-1}\operatorname{tg}^{n-1}\alpha_j + \ldots + a_1 \operatorname{tg}\alpha_j + a_0 = 0. \quad (3)$$

Рассмотрим многочлен

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0.$$

Равенство (3) показывает, что этот многочлен степени n обращается в нуль при $n+1$ значениях аргумента z, а именно при

$$\operatorname{tg}\alpha_1,\ \operatorname{tg}\alpha_2,\ \ldots,\ \operatorname{tg}\alpha_{n+1}.$$

Эти значения z все различны, так как по условию теоремы разность между любыми двумя из углов α_j не кратна π. Отсюда $P(z) \equiv 0$, т. е. $M(\sin x,\ \cos x) \equiv 0$.

Рассмотрим теперь случай, когда одно из чисел α_j имеет вид $\frac{\pi}{2}(2k+1)$. При этом значении α_j равенство (2) принимает вид $a_n \sin^n\alpha_j = 0$, откуда $a_n = 0$, так как $\sin\alpha_j \neq 0$.

Таким образом, многочлен (1) можно записать так:

$$M(\sin x,\ \cos x) = \cos x\,(a_{n-1}\sin^{n-1}x + a_{n-2}\sin^{n-2}x\cos x + \ldots + a_1 \sin x \cos^{n-2}x + a_0\cos^{n-1}x). \quad (4)$$

Заметим, что если среди чисел α_j имеется одно число вида $\frac{\pi}{2}(2k+1)$, то оно является единственным, так как если бы среди чисел α_j имелось еще одно число такого вида, то тогда разность между этими двумя числами была бы кратна π, что противоречит условию теоремы.

Из $n+1$ значений x, обращающих данный многочлен в нуль, исключим значение, имеющее вид $\frac{\pi}{2}(2k+1)$. Остальные n значений обращают в нуль многочлен (4). Но так как среди них нет значений вида $\frac{\pi}{2}(2k+1)$, то при этих n значениях x обращается в нуль многочлен, стоящий в скобках.

Следовательно, из доказанного выше (в первом случае) вытекает, что

$$a_{n-1} = a_{n-2} = \ldots = a_1 = a_0 = 0.$$

Значит,

$$M(\sin x,\ \cos x) \equiv 0,$$

Пример 3. Доказать тождество

$$\cos^2\alpha + \cos^2(60^\circ + \alpha) + \cos^2(60^\circ - \alpha) - 1{,}5 = 0.$$

Левая часть равенства является однородным многочленом $M(\sin\alpha, \cos\alpha)$ второй степени относительно $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$. Поэтому достаточно показать, что этот многочлен обращается в нуль при трех значениях α, отличных друг от друга на числа, не кратные π.

Пусть $\alpha = 0^\circ$, 30°, -30° (для простоты вычислений).

Вычислением убеждаемся, что при $\alpha = 0^\circ$, 30°, -30° утверждение задачи верно.

Пример 4. Доказать тождество

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2(\alpha + \beta) - 2\cos\alpha\cos\beta\cos(\alpha + \beta) = 1.$$

Обозначим

$$M(\sin\alpha, \cos\alpha) = \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2(\alpha + \beta) - 2\cos\alpha\cos\beta\cos(\alpha + \beta).$$

Очевидно, $M(\sin\alpha, \cos\alpha)$ — многочлен второй степени относительно $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ (β считаем параметром).

Проверим справедливость утверждения задачи при $\alpha = 0^\circ$, 90°, 60°.

Если $\alpha = 0^\circ$, то $M = 1 + \cos^2\beta + \cos^2\beta - 2\cos^2\beta = 1$.

Если $\alpha = 90^\circ$, то $M = 0 + \cos^2\beta + \sin^2\beta - 2 \cdot 0 = 1$.

Если $\alpha = 60^\circ$, то $M = 0{,}25 + \cos^2\beta + \cos^2(60^\circ + \beta) - 2 \cdot 0{,}5\cos\beta\cos(60^\circ + \beta) = 0{,}25 + \cos^2\beta + \cos^2(60^\circ + \beta) - \cos(60^\circ + \beta)\cos\beta$.

Многочлен

$$0{,}25 + \cos^2\beta + \cos^2(60^\circ + \beta) - \cos(60^\circ + \beta)\cos\beta$$

является однородным многочленом второй степени относительно $\sin\beta$ и $\cos\beta$. Легко убедиться, что он равен 1 при $\beta = 0^\circ$, -30°, 30°.

Задача решена.

Упражнения

Доказать тождества:

1. $\sin^2(45^\circ + \alpha) - \sin^2(30^\circ - \alpha) - \sin 15^\circ \cos(15^\circ + 2\alpha) = \sin 2\alpha$.
2. $\cos^2(\alpha + \beta) + \cos^2(\alpha - \beta) - \cos 2\alpha \cos 2\beta = 1$.
3. Доказать, что $\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma - 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma = 2$, если $\alpha + \beta + \gamma = \pi$.
4. Доказать, что $\dfrac{\log_a x}{\log_{ab} x} = 1 + \log_a b$.
5. Упростить выражение $[(\log_b^4 a + \log_a^4 b + 2)^{0,5} - 2]^{0,5}$ при условии, что $1 < a < b$.
6. Доказать, что

$$\log_{ab} c = \frac{\log_a c \cdot \log_b c}{\log_a c + \log_b c}.$$

7. Доказать тождество

$$\frac{3-4\cos 2\alpha+\cos 4\alpha}{3+4\cos 2\alpha+\cos 4\alpha}=\operatorname{tg}^4\alpha.$$

8. Упростить выражение $\sin^3 2\alpha\cos 6\alpha+\cos^3 2\alpha\sin 6\alpha$.
9. Известно, что $\cos 2\alpha=a$. Найти $\sin^6\alpha+\cos^6\alpha$.
10. Доказать, что выражение

$$4\cos\alpha\cos\varphi\cos(\alpha-\varphi)+2\sin^2(\alpha-\varphi)-\cos 2\varphi$$

не зависит от φ.
11. Вычислить выражение

$$\frac{1+\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{tg}^4\alpha}{1+\operatorname{ctg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^4\alpha}+\frac{1+\operatorname{ctg}^2 a+\operatorname{ctg}^4\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{tg}^4\alpha},$$

если $\cos 4\alpha=0{,}5$.

12. Доказать, что $\operatorname{tg}142°30'-\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}$ есть целое число.
13. Вычислить $\log_6 16$, если $\log_{12}27=m$.
14. Вычислить $\lg\operatorname{tg}1°+\lg\operatorname{tg}2°+\ldots+\lg\operatorname{tg}89°$.
15. Доказать тождество $(1+x+x^2+\ldots+x^n)^2-x^n=(1+x+x^2+\ldots+x^{n-1})(1+x+x^2+\ldots+x^{n+1})$.
16. Вычислить $\sqrt{55+8\sqrt{39}}+\sqrt{103-16\sqrt{39}}$.

§ 2. Методы доказательства неравенств

Применение теоремы о средних величинах

При доказательстве многих неравенств ссылаются на теорему:

Теорема. *Среднее арифметическое любых n неотрицательных чисел a_1, a_2, a_3, ..., a_n не меньше их среднего геометрического:*

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\geqslant\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\ldots a_n}\ \textit{(неравенство Коши).}$$

Причем равенство в этой формуле достигается только при

$$a_1=a_2=\ldots=a_n.$$

В частности,

$$\frac{a_1+a_2}{2}\geqslant\sqrt{a_1a_2}. \tag{1}$$

Пример 1. Доказать неравенство

$$a^4+b^4+c^4\geqslant abc(a+b+c),\quad a\geqslant 0,\quad b\geqslant 0,\quad c\geqslant 0.$$

Преобразуем левую часть неравенства следующим образом:

$$a^4+b^4+c^4=\frac{a^4+b^4}{2}+\frac{b^4+c^4}{2}+\frac{c^4+a^4}{2}.$$

На основании неравенства (1) получаем:

$$\frac{a^4+b^4}{2} \geqslant \sqrt{a^4b^4} = a^2b^2, \quad \frac{b^4+c^4}{2} \geqslant b^2c^2, \quad \frac{c^4+a^4}{2} \geqslant c^2a^2.$$

Сложив почленно эти неравенства, имеем

$$a^4 + b^4 + c^4 \geqslant a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2. \tag{2}$$

Преобразуем правую часть неравенства (2) таким образом:

$$a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 = \frac{a^2b^2+b^2c^2}{2} + \frac{b^2c^2+c^2a^2}{2} + \frac{c^2a^2+a^2b^2}{2}.$$

На основании неравенства (1) получаем:

$$\frac{a^2b^2+b^2c^2}{2} \geqslant \sqrt{a^2b^2 \cdot b^2c^2} = ab^2c,$$

$$\frac{b^2c^2+c^2a^2}{2} \geqslant \sqrt{b^2c^2 \cdot c^2a^2} = bc^2a,$$

$$\frac{c^2a^2+a^2b^2}{2} \geqslant \sqrt{c^2a^2 \cdot a^2b^2} = ca^2b.$$

Сложив почленно эти три неравенства, получаем

$$a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \geqslant abc\,(b+c+a). \tag{3}$$

Из неравенства (2) и (3) следует утверждение задачи.

Пример 2. Доказать неравенство

$$\sqrt{4a+1} + \sqrt{4b+1} + \sqrt{4c+1} \leqslant 5,$$

если $a+b+c=1$, а подкоренные выражения неотрицательны. Очевидно,

$$\sqrt{4a+1} = \sqrt{(4a+1)\cdot 1}.$$

Применив неравенство (1), получаем

$$\sqrt{4a+1} = \sqrt{(4a+1)\cdot 1} \leqslant \frac{(4a+1)+1}{2} = 2a+1. \tag{4}$$

Аналогично

$$\sqrt{4b+1} \leqslant 2b+1, \tag{5}$$

$$\sqrt{4c+1} \leqslant 2c+1. \tag{6}$$

Сложив почленно неравенства (4) — (6) и учитывая, что $a+b+c=1$, найдем

$$\sqrt{4a+1} + \sqrt{4b+1} + \sqrt{4c+1} \leqslant 2a+2b+2c+3 = 2(a+b+c)+3 = 2\cdot 1+3 = 5.$$

Утверждение задачи доказано.

Доказательство неравенств методом математической индукции

Пусть требуется доказать справедливость неравенства $f(n) > 0$ при $n \geqslant k$ (n и k — натуральные числа). Тогда проверяется справедливость этого неравенства при $n = k$. Допускается его справедливость для $n = k_1$ ($k_1 > k$, k_1 — натуральное число). После этого доказывается справедливость неравенства $f(n) > 0$ при $n = k_1 + 1$, причем при доказательстве используется неравенство $f(k_1) > 0$.

Пример 3. Доказать, что при натуральном $n \geqslant 3$ верно неравенство

$$2^n > 2n + 1. \tag{7}$$

При $n = 3$ неравенство (7) верно, потому что

$$2^3 > 2 \cdot 3 + 1.$$

Допустим, что неравенство (7) справедливо при $n = k$ ($k > 3$), т. е.

$$2^k > 2k + 1. \tag{8}$$

Докажем, что неравенство (7) верно и при $n = k + 1$, т. е. докажем, что

$$2^{k+1} > 2(k + 1) + 1 = 2k + 3. \tag{9}$$

Неравенство (9) доказываем, используя неравенство (8):

$$2^{k+1} = 2^k \cdot 2 > (2k + 1) \cdot 2 = 4k + 2 = (2k + 3) + (2k - 1). \tag{10}$$

Так как $k > 3$, то $2k - 1 > 0$. Поэтому из неравенства (10) следует

$$2^{k+1} > 2k + 3,$$

т. е. доказано неравенство (9).

Таким образом, неравенство $2^n > 2n + 1$ справедливо при любом натуральном $n \geqslant 3$.

Пример 4. Доказать, что при любом натуральном $n \geqslant 1$ верно неравенство

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{2n-1}{2n} \leqslant \frac{1}{\sqrt{3n+1}}. \tag{11}$$

При $n = 1$ неравенство (11) справедливо, так как

$$\frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{\sqrt{3 \cdot 1 + 1}}.$$

Допустим, что неравенство (11) верно при $n = k$ ($k > 1$), т. е.

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{2k-1}{2k} \leqslant \frac{1}{\sqrt{3k+1}}. \tag{12}$$

Использовав неравенство (12), докажем справедливость неравенства (11) при $n = k + 1$, т. е.

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{2(k+1)-1}{2(k+1)} \leqslant \frac{1}{\sqrt{3(k+1)+1}}. \qquad (13)$$

Для этого левую часть неравенства (13) преобразуем следующим образом:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{2(k+1)-1}{2(k+1)} = \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{2k-1}{2k}\right) \times$$

$$\times \frac{2(k+1)-1}{2(k+1)}.$$

Применив неравенство (12), получаем

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{2(k+1)-1}{2(k+1)} \leqslant \frac{1}{\sqrt{3k+1}} \cdot \frac{2(k+1)-1}{2(k+1)}.$$

Теперь докажем, что

$$\frac{1}{\sqrt{3k+1}} \cdot \frac{2(k+1)-1}{2(k+1)} \leqslant \frac{1}{\sqrt{3(k+1)+1}}.$$

или

$$\frac{1}{\sqrt{3k+1}} \cdot \frac{2k+1}{2k+2} \leqslant \frac{1}{\sqrt{3k+4}}. \qquad (14)$$

Обе части неравенства (14) положительны. Поэтому неравенства (14) и

$$\frac{1}{3k+1}\left(\frac{2k+1}{2k+2}\right)^2 \leqslant \frac{1}{3k+4}. \qquad (15)$$

эквивалентны.

Таким образом, для доказательства неравенства (14) достаточно доказать неравенство (15).

Преобразуем неравенство (15) следующим образом:

$$(2k+1)^2(3k+4) \leqslant (3k+1)(2k+2)^2,$$

$$(4k^2+4k+1)(3k+4) \leqslant (3k+1)(4k^2+8k+4).$$

Раскрыв скобки и приведя подобные члены, получаем $k \geqslant 0$.

Таким образом, неравенство (15), а следовательно, и неравенство (14) доказаны.

Применение производной к доказательству неравенств

Основная идея этого метода сводится к следующему.

Пусть требуется доказать, что $f(x) \geqslant \varphi(x)$ при $x \geqslant a$. Считаем,

что функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ при $x \geqslant a$ дифференцируемы и имеют одинаковые области определения.

Допустим, что при $x = af(x) \geqslant \varphi(x)$. Находим производную функции

$$F(x) = f(x) - \varphi(x).$$

Если при $x > aF'(x) > 0$, то $F(x)$ возрастающая и неравенство $f(x) \geqslant \varphi(x)$ доказано.

Если существует на $[a, +\infty)$ точка x_0, в которой $F'(x)$ обращается в нуль, то $F(x)$ монотонна на $[a, x_0]$ и $[x_0, +\infty)$. Поэтому для доказательства неравенства $f(x) \geqslant \varphi(x)$ нужно вычислением убедиться, что $f(x_0) \geqslant 0$, и исследовать поведение функции $F(x)$ при $x \to +\infty$.

Пример 5. Доказать, что при $x \geqslant 1$ имеет место неравенство

$$2^{x+2} > x + 5.$$

Исследуем функцию

$$F(x) = 2^{x+2} - (x + 5) = 4 \cdot 2^x - x - 5$$

на $[1, +\infty) \cdot F(1) = 2 > 0$. $F'(x) = 4 \cdot 2^x \cdot \ln 2 - 1$.

Функция $y = 2^x$ на $[1, +\infty)$ возрастающая. Поэтому

$$F'(x) = 4 \cdot 2^x \cdot \ln 2 - 1 \geqslant 4 \cdot 2 \cdot \ln 2 - 1 > 4 \cdot 2 \cdot 0{,}691 - 1 > 0.$$

Следовательно, $F(x)$ на $[1, +\infty)$ возрастающая и так как $F(1) > 0$, то неравенство доказано.

Пример 6. Доказать неравенство

$$3a^3 + 7b^3 > 9ab^2,$$

если $a > 0$ и $b > 0$.

Так как $b > 0$, то, разделив обе части неравенства на b^3, получим эквивалентное неравенство:

$$3\left(\frac{a}{b}\right)^3 + 7 > 9\frac{a}{b}.$$

Обозначив $a : b = x$, имеем

$$3x^3 + 7 > 9x, \quad (x > 0).$$

Составим функцию

$$F(x) = 3x^3 - 9x + 7.$$

Она определена на $[0, +\infty)$. $F(0) = 7 > 0$. $F'(x) = 9x^2 - 9 = 9(x^2 - 1)$. $F'(x)$ обращается в нуль при $x_1 = 1$ и $x_2 = -1$.

Мы исследуем функцию $F(x)$ только на $[0, +\infty)$:

$$F'(x) < 0 \text{ на } [0, 1).$$

$$F'(x) = 0 \text{ при } x = 1.$$

$$F'(x) > 0 \text{ на } (1, +\infty).$$

Следовательно, $F(x)$ на $[0, 1)$ убывает, на $(1, +\infty)$ возрастает, достигает наименьшего значения в точке $x_1 = 1$.

Но $F(1) = 1$, поэтому $F(x) > 1$ если $x \geqslant 0$.

Утверждение задачи доказано.

Функциональный подход к доказательству неравенств

Неравенство вида $F(a, b, c, \ldots, m) \geqslant P(a, b, c, \ldots, m)$ (относительно переменных $a, b, c, \ldots, m$) преобразуется к виду $F(a, b, c, \ldots, m) - P(a, b, c, \ldots, m) \geqslant 0$. Исследуется функция $f(a) = F(a, b, c, \ldots, m) - P(a, b, c, \ldots, m)$ относительно переменного a (все остальные переменные данного неравенства считаются параметрами).

Пример 7. Доказать, что

$$4ab(3 - a) - 4a(1 + b^2) \leqslant b, \tag{16}$$

если $a > 0$ и $b > 0$.

Составим функцию

$$F(a) = 4ab(3 - a) - 4a(1 + b^2) - b = -4a^2b + 12ab - 4a - 4ab^2 - b = -4ba^2 + 4a(3b - 1 - b^2) - b.$$

Как видим, функция $F(a)$ является квадратным трехчленом (относительно a; b считается параметром). $F(a)$ определена на $(0, +\infty)$.

Доказать неравенство (16) это значит доказать, что $F(a) \leqslant 0$ на $(0, +\infty)$ при любом $b > 0$.

Если $3b - 1 - b^2 \leqslant 0$, то утверждение задачи очевидно, так как в этом случае все коэффициенты квадратного трехчлена $F(a)$ отрицательны.

Покажем, что $F(a) \leqslant 0$ и в том случае, если

$$3b - 1 - b^2 > 0, \quad b > 0. \tag{17}$$

Неравенство (17) выполняется на (x_1, x_2), где

$$x_1 = 0{,}5(3 - \sqrt{5}) \approx 0{,}382; \quad x_2 = 0{,}5(3 + \sqrt{5}) \approx 2{,}618.$$

Исследуем дискриминант квадратного трехчлена $F(a)$:

$$D = 4^2(3b - 1 - b^2)^2 - 16b^2 = 16(b^2 - 2b + 1)(b^2 - 4b + 1).$$

Трехчлен $b^2 - 2b + 1 \geqslant 0$ при всех значениях b. Трехчлен $b^2 - 4b + 1$ имеет корни:

$$x_3 = 2 - \sqrt{3} \approx 0{,}268; \quad x_4 = 2 + \sqrt{3} \approx 3{,}732.$$

Отсюда понятно, что $D < 0$ на (x_3, x_4). Но интервал (x_1, x_2) содер-

жится внутри интервала (x_3, x_4). Следовательно, $F(a) \leqslant 0$ и в том случае, если $3b - 1 - b^2 > 0$.

Утверждение задачи доказано.

Доказательство неравенств путем замены входящих в них переменных

Замена переменных, входящих в неравенство, может проводиться с двумя целями: а) уменьшить число переменных; б) привести неравенство к виду, более удобному для исследования его свойств.

Пример 8. Доказать неравенство

$$8(a^4 + b^4) \geqslant (a + b)^4, \quad b \neq 0.$$

Разделим обе части неравенства на b^4:

$$8\left(\frac{a^4}{b^4} + 1\right) \geqslant \left(\frac{a}{b} + 1\right)^4.$$

Обозначим $a : b = x$. Получим

$$8(x^4 + 1) \geqslant (x + 1)^4.$$

Отсюда

$$7x^4 - 4x^3 - 6x^2 - 4x + 7 \geqslant 0.$$

Теперь доказательство неравенства свелось к исследованию функции

$$f(x) = 7x^4 - 4x^3 - 6x^2 - 4x + 7$$

на $(-\infty, +\infty)$.

Находим

$$f'(x) = 28x^3 - 12x^2 - 12x - 4 = 4(7x^3 - 3x^2 - 3x - 1).$$

Очевидно, что $f'(1) = 0$.

Применив теорему Безу, разложим многочлен $7x^3 - 3x^2 - 3x - 1$ на множители:

$$7x^3 - 3x^2 - 3x - 1 = (x - 1)(7x^2 + 4x + 1).$$

Квадратный трехчлен $7x^2 + 4x + 1$ действительных корней не имеет. Поэтому функция $f(x)$ имеет только одну подозрительную на экстремум точку $x = 1$. Находим, что $f(1) = 0$. Кроме того, при $x \to +\infty$ и при $x \to -\infty f(x) \to +\infty$.

Итак, на $(-\infty, 1)$ $f'(x) < 0$, и, следовательно, $f(x)$ убывает от $+\infty$ до 0; на $(1, +\infty)$ $f'(x) > 0$ и $f(x)$ возрастает от 0 до $+\infty$.

Утверждение задачи доказано.

Доказательство неравенств путем установления их свойств на отдельных частях множества их определения

Пусть требуется доказать справедливость неравенства $F(x) \geqslant 0$ на (a, b). Разбиваем данный интервал (a, b) на несколько промежутков и доказываем его справедливость отдельно для каждого из этих промежутков. При этом каждый раз левая часть неравенства преобразовывается к новому виду.

Пример 9. Доказать неравенство

$$a^4 - a^2 - 3a + 5 > 0, \text{ если } a \geqslant 0. \tag{18}$$

Будем рассматривать левую часть этого неравенства как функцию от a, определенную на $[0, +\infty)$:

$$f(a) = a^4 - a^2 - 3a + 5.$$

Применение производной для исследования свойств этой функции неэффективно, так как $f'(x) = 4a^3 - 2a - 3$ является многочленом третьей степени, корни которого найти достаточно трудно. Поэтому поступаем следующим образом.

Сначала докажем, что неравенство (18) верно на $[0, 1]$. Для этого представим $f(a)$ в следующем виде:

$$f(a) = (a^4 + 5) - (a^2 + 3a).$$

Обозначим $\varphi(a) = a^4 + 5$, $\psi(a) = a^2 + 3a$. Очевидно, на $[0, 1]$:

$$5 \leqslant \varphi(a) \leqslant 6, \quad 0 \leqslant \psi(a) \leqslant 4.$$

Отсюда понятно, что при любом значении a из отрезка $[0,1]$ неравенство (18) верно.

Теперь преобразуем $f(a)$ к виду

$$f(a) = a(a^3 - a - 3) + 5 = a[a(a^2 - 1) - 3] + 5.$$

При $a \geqslant 2$ выражение, стоящее в квадратной скобке, положительно, так как при $a \geqslant 2$

$$a(a^2 - 1) \geqslant 3a.$$

Итак, справедливость неравенства (18) показана и на $[2, +\infty)$. Теперь осталось доказать утверждение задачи только для $(1, 2)$. Представим функцию $f(a)$ в виде

$$f(a) = a^2(a^2 - 1) + (5 - 3a).$$

Отсюда видно, что она положительна на $\left(1, \frac{5}{3}\right]$. Осталось только неясным ее поведение на $\left(\frac{5}{3}, 2\right)$.

Запишем функцию $f(a)$ в виде

$$f(a) = a^4 - (a^2 + 3a - 5).$$

Трехчлен, стоящий в круглых скобках, достигает своего наименьшего значения при $a = -1{,}5$. Поэтому функция

$$F(a) = a^2 + 3a - 5$$

на $\left(\frac{5}{3}, 2\right]$ возрастающая и достигает своего наибольшего значения при $a = 2$; $F(2) = 5$.

Функция $\psi(a) = a^4$ на $\left(\frac{5}{3}, 2\right]$ возрастающая и достигает своего наименьшего значения при $a = \frac{5}{3}$,

$$\psi\left(\frac{5}{3}\right) = \frac{625}{81} > 8.$$

Отсюда ясно, что $f(a) > 0$ и на $\left(\frac{5}{3}, 2\right]$.

Утверждение задачи доказано.

Доказательство числовых неравенств

Пример 10. Доказать неравенство

$$\sqrt[3]{3+\sqrt[3]{3}} + \sqrt[3]{3-\sqrt[3]{3}} < 2\sqrt[3]{3}.$$

Обычно путем неоднократного возведения в степень обеих частей неравенства такого вида сводятся к рациональным. Но в данном случае такой путь сложен. Здесь гораздо проще поступить следующим образом.

Нам нужно доказать, что левая часть неравенства меньше правой. Поэтому будем находить (при помощи таблиц) приближенные значения обеих частей неравенства (левой части — с избытком, правой — с недостатком).

Вычисления ведем сначала с точностью до 1, потом до 0,1 и т. д. до тех пор, пока не убедимся в справедливости данного неравенства.

	$\sqrt[3]{3+\sqrt[3]{3}} + \sqrt[3]{3-\sqrt[3]{3}}$	$2\sqrt[3]{3}$
С точностью до 1:	$2 + 2 = 4$	2
С точностью до 0,1:	$1{,}6 + 1{,}2 = 2{,}8$	2,8

Итак,

$$\sqrt[3]{3+\sqrt[3]{3}}+\sqrt[3]{3-\sqrt[3]{3}}<2{,}8, \text{ а } 2\sqrt[3]{3}>2{,}8.$$

Утверждение задачи доказано.

Упражнения

1. Доказать неравенства: 1) $\log_{81} 576<\log_{36} 192$; 2) $3^{34}>2^{51}$; 3) $202^{303}>303^{202}$.

2. Доказать, что если $a\geqslant 0$, то верно неравенство

$$a^3+3a^2+15>13a.$$

3. Доказать, что если $a\geqslant 0$, $b\geqslant 0$, то $2(a^4+b^4)+19>12ab$.

4. Доказать, что $\frac{a}{b+c-a}+\frac{b}{c+a-b}+\frac{c}{a+b-c}\geqslant 3$, если a, b, c — стороны треугольника.

Указание. Перейти к новым переменным x, y, z, обозначив $b+c-a=x$, $c+a-b=y$, $a+b-c=z$.

5. Доказать, что если $a\geqslant 0$, $b\geqslant 0$, то верно неравенство $a^4+a^3b-4a^2b+ab+b^2\geqslant 0$.

6. Доказать, что если $a\geqslant 0$, $b\geqslant 0$, $c\geqslant 0$, то имеет место неравенство $6a+4b+5c\geqslant 5\sqrt{ab}+7\sqrt{ac}+3\sqrt{bc}$.

7. Доказать, что если $a\geqslant 0$, то верно неравенство $\sqrt{a}(a+1)+a(a-4)+1\geqslant 0$.

8. Доказать неравенство $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\geqslant 3$, если $a>0$, $b>0$, $c>0$.

9. Доказать, что для любых действительных чисел x и y верно неравенство $x^4+y^4\geqslant x^3y+xy^3$.

10. Доказать, что $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{3n+1}<2$, если $n\geqslant 2$ (n—натуральное число).

11. Доказать, что $\frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}+\frac{ab}{c}\geqslant a+b+c$, если $a>0$, $b>0$, $c>0$.

12. Доказать, что $3abc\leqslant a^3+b^3+c^3$, если $a\geqslant 0$, $b\geqslant 0$, $c\geqslant 0$.

13. Доказать, что если x и y — неотрицательные числа, n — натуральное число, то $2^{n-1}(x^n+y^n)\geqslant (x+y)^n$.

14. Доказать, что $\frac{1}{\sqrt{bc}}+\frac{1}{\sqrt{ca}}+\frac{1}{\sqrt{ab}}\leqslant\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$, если $a>0$, $b>0$, $c>0$.

15. Доказать, что для любого натурального n верно неравенство

$$\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}>\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}.$$

§ 3. Решение целых уравнений и неравенств[1]

Решение уравнений, содержащих параметры

Главная трудность при решении уравнений, содержащих параметры, — это исследование их корней как функций параметров. Это исследование можно провести одним из следующих способов: а) решить данное уравнение $f(x, a) = 0$ относительно неизвестного x и исследовать функцию $x = \varphi(a)$; б) решить уравнение $f(x, a) = 0$ относительно параметра a (до решения уравнения относительно x) и исследовать функцию $a = \psi(x)$. В ряде случаев целесообразно применить комбинацию обоих способов.

Пример 1. Решить уравнение

$$(a^2 - 5a + 6)x = a^2 - 4 \tag{1}$$

относительно x. Исследовать, при каких значениях параметра a это уравнение имеет: положительные корни; отрицательные корни; нулевой корень; бесчисленное множество решений; не имеет ни одного действительного корня.

Из уравнения (1) получаем

$$x = \frac{a^2 - 4}{a^2 - 5a + 6}, \tag{2}$$

если $a^2 - 5a + 6 \neq 0$.

Из равенства (2) ясно, что x является функцией аргумента a, поэтому, чтобы ответить на вопросы задачи, нужно исследовать функцию

$$f(a) = \frac{a^2 - 4}{a^2 - 5a + 6}.$$

Так как $a^2 - 5a + 6 = (a - 3)(a - 2)$, то $a^2 - 5a + 6 = 0$, если $a = 2$ или $a = 3$. Но $a^2 - 4 = 0$ также при $a = 2$.

Поэтому если $a = 2$, то уравнение (1) имеет бесчисленное множество решений.

Если $a \neq 2$ и $a \neq 3$, то

$$f(a) = \frac{(a + 2)(a - 2)}{(a - 3)(a - 2)} = \frac{a + 2}{a - 3}.$$

При $a = 3$ уравнение (1) решений не имеет.

Так как $a + 2 = 0$, если $a = -2$, то уравнение (1) имеет нулевое решение при $a = -2$.

---

[1] Рассмотрим только те методы решения целых уравнений (неравенств) и их систем, знакомство с которыми не предполагается школьными программами.

Построим график функции $f(a)=\dfrac{a+2}{a-3}$ (рис. 26).

Из графика видно, что $f(a)>0$ на $(-\infty, -2)$ и $(3, +\infty)$; $f(a)<0$ на $(-2, 3)$.

Итак, уравнение (1) имеет положительные корни, если $a<-2$ и $a>3$. Его корни отрицательны, если $-2<a<3$.

Пример 2. Решить уравнение

$$4x^2+(a-2)x+(a-5)=0. \tag{3}$$

Исследовать, при каких значениях параметра a уравнение (3) имеет: положительные корни; отрицательные корни; один положительный и один отрицательный корень; равные корни; не имеет ни одного действительного корня.

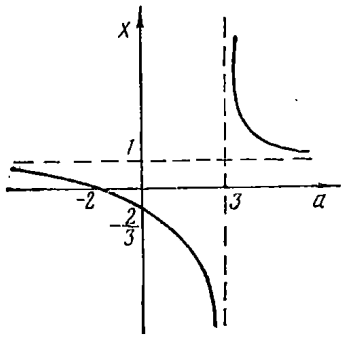


Рис. 26

Получить ответ на вопросы задачи можно двумя способами:

1. Сначала решить уравнение (3) относительно x, потом заняться исследованием его корней.

2. Решить уравнение (3) относительно параметра a и исследовать a как функцию x. Как видим, в этом случае исследование корней уравнения (3) можно выполнить, не решая уравнения (3) относительно x.

Способ 1. Решив уравнение (3) относительно x, получаем

$$x_1=\frac{-(a-2)+\sqrt{(a-2)^2-16(a-5)}}{8},$$

$$x_2=\frac{-(a-2)-\sqrt{(a-2)^2-16(a-5)}}{8}.$$

Обозначим: $D=(a-2)^2-16(a-5)=a^2-20a+84$.

Если $D=0$, то $x_1=x_2=-\dfrac{1}{8}(a-2)=\dfrac{1}{8}(2-a)$.

Квадратный трехчлен $a^2-20a+84$ имеет корни $a_1=6$, $a_2=14$.

Итак, если $a=6$, то $x_1=x_2=(2-6):8=-0{,}5$; если $a=14$, то $x_1=x_2=(2-14):8=-1{,}5$.

Если $D<0$, то уравнение (3) не имеет действительных корней. Очевидно, $D<0$, если $6<a<14$.

Если $D>0$, т. е. если $a<6$ или $a>14$, то уравнение (3) имеет два различных действительных корня.

Для того чтобы $x_1>0$ и $x_2>0$, параметр a должен удовлетворять следующей системе неравенств:

$$\left.\begin{array}{l} a<6 \text{ или } a>14, \\ -(a-2)+\sqrt{a^2-20a+84}>0, \\ -(a-2)-\sqrt{a^2-20a+84}>0. \end{array}\right\} \quad (4)$$

Очевидно, здесь второе неравенство является следствием третьего. Поэтому система неравенств (4) эквивалентна такой системе:

$$\left.\begin{array}{l} a<6 \text{ или } a>14, \\ -(a-2)-\sqrt{a^2-20a+84}>0. \end{array}\right\} \quad (5)$$

Решаем последнее из этих неравенств:

$$-(a-2)-\sqrt{a^2-20a+84}>0,$$
$$2-a>\sqrt{a^2-20a+84}. \quad (6)$$

Правая часть последнего неравенства — положительное число. Поэтому $2-a>0$, т. е. $a<2$.

Если $a<2$, то неравенство (6) эквивалентно неравенству

$$(2-a)^2>a^2-20a+84$$

или

$$4-4a+a^2>a^2-20a+84,$$
$$16a>80,\ a>5.$$

Таким образом, система неравенств (4) решений не имеет и, следовательно, ни при каких значениях a не существует $x_1>0$ и $x_2>0$.

Для того чтобы были $x_1<0$ и $x_2<0$, параметр a должен удовлетворять системе неравенств

$$\left.\begin{array}{l} a<6 \text{ или } a>14, \\ -(a-2)+\sqrt{a^2-20a+84}<0, \\ -(a-2)-\sqrt{a^2-20a+84}<0. \end{array}\right\} \quad (7)$$

Очевидно, здесь третье неравенство является следствием второго. Поэтому система неравенств (7) эквивалентна системе

$$\left.\begin{array}{l} a<6 \text{ или } a>14, \\ -(a-2)+\sqrt{a^2-20a+84}<0. \end{array}\right\} \quad (8)$$

Решаем второе неравенство системы (8):

$$-(a-2)+\sqrt{a^2-20a+84}<0,$$
$$\sqrt{a^2-20a+84}<a-2. \quad (9)$$

Левая часть неравенства (9) положительна. Поэтому $a-2>0$, т. е. $a>2$.

Если $2<a<6$ или $a>14$, то неравенство (9) эквивалентно неравенству

$$a^2-20a+84<(a-2)^2$$

или

$$a^2-20a+84<a^2-4a+4,$$

$$16a>80,\ a>5.$$

Итак, система неравенств (8) эквивалентна системе неравенств

$$\left.\begin{array}{l} 2<a<6 \text{ или } a>14, \\ a>5. \end{array}\right\}$$

Отсюда получаем:

$$5<a<6 \text{ или } a>14.$$

Итак, если $5<a<6$ или $a>14$, то $x_1<0$ и $x_2<0$.

Подведем итоги. Мы установили, что уравнение (3) имеет различные действительные корни, если $a<6$ или $a>14$. Таких a, при которых $x_1>0$ и $x_2>0$, не существует. При $5<a<6$ или $a>14$ оба корня отрицательные. Поэтому, если $a<5$, то один из корней положительный, а второй отрицательный.

Способ 2. Решаем уравнение (3) относительно параметра a:

$$a=\frac{-4x^2+2x+5}{x+1}, \tag{10}$$

если $x\neq-1$.

Теперь рассматриваем a как функцию x, определенную на $(-\infty, -1)$ и $(-1, +\infty)$.

Для определения экстремальных точек функции a преобразуем уравнение (10) к виду

$$a=a(x)=-4x+6-\frac{1}{x+1}.$$

$$a'(x)=-4+\frac{1}{(x+1)^2}.$$

Производная $a'(x)$ обращается в нуль в точках

$$x_1=-0{,}5 \text{ и } x_2=-1{,}5.$$

Далее,

$$\lim_{x\to-\infty} a(x)=+\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} a(x)=-\infty,$$

$$\lim_{x\to-1\,(x>-1)} a(x)=-\infty, \quad \lim_{x\to-1(x<-1)} a(x)=+\infty.$$

Вычисляем

$$a(-0{,}5) = 6;\ \ a(-1{,}5) = 14;\ a(0) = 5.$$

Строим график функции $a(x)$ (рис. 27).

Мы не определяем нули функции $a(x)$ и промежутки ее выпуклости и вогнутости, так как для исследования корней уравнения (3) эти свойства функции $a(x)$ не нужны.

Рассмотрим график функции $a(x)$.

Если $a = 14$, то $x_1 = x_2 = -1{,}5$.

Если $a > 14$, то $x_1 < 0$ и $x_2 < 0$.

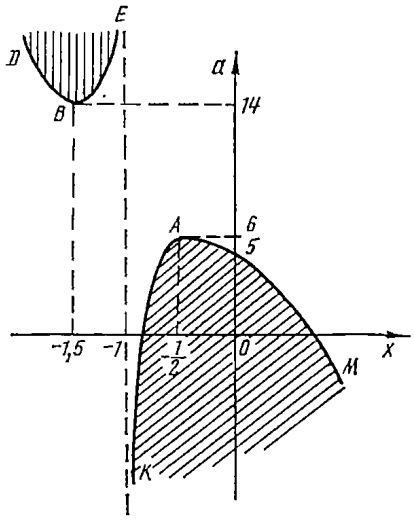


Рис. 27

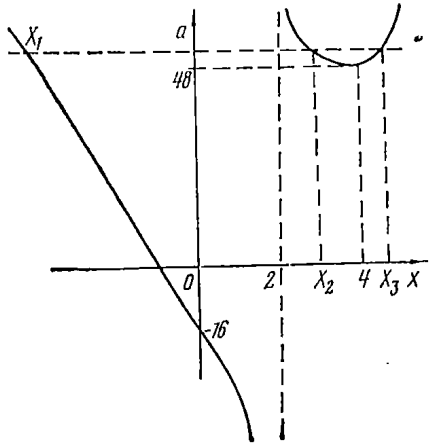


Рис. 28

Если $6 < a < 14$, то уравнение (3) действительных корней не имеет.

Если $a = 6$, то $x_1 = x_2 = -0{,}5$.

Если $5 < a < 6$, то $x_1 < 0$ и $x_2 < 0$.

Если $a = 5$, то $x_2 = 0$, $x_1 < 0$.

Если $a < 5$, то $x_1 < 0$ и $x_2 > 0$.

Из графика видно, что ни при каком значении параметра a корень уравнения (3) не равен -1. По графику можно также проследить, как изменяется величина корней уравнения (3) с изменением параметра a.

Из второго решения видна роль производной при исследовании корней уравнений, содержащих параметры. В этом решении проявился функциональный подход к исследованию корней уравнений.

Изучение графика функции $a(x)$ позволяет наглядно определить нужные свойства корней, избавляет нас от лишних вычислений.

Пример 3. Определить, при каких значениях a все три корня уравнения

$$x^3 - ax + (2a + 32) = 0 \qquad (11)$$

действительные.

На первый взгляд кажется, что, чтобы ответить на вопрос задачи, нужно сначала решить уравнение относительно x, а потом заняться исследованием его корней. Но решение уравнения третьей степени дело достаточно сложное. Поэтому здесь еще больше очевидны преимущества функционального подхода к исследованию корней уравнений.

Решаем уравнение (11) относительно параметра a:

$$a = \frac{x^3 + 32}{x - 2},$$

если $x \neq 2$.

Исследуем функцию

$$a = a(x) = \frac{x^3 + 32}{x - 2}.$$

Она определена на $(-\infty, 2)$ и $(2, +\infty)$.

$$a'(x) = \frac{3x^2(x-2) - (x^3 + 32)}{(x-2)^2} = \frac{2(x^3 - 3x^2 - 16)}{(x-2)^2}.$$

Замечаем, что трехчлен $x^3 - 3x^2 - 16$ имеет целый корень $x_1 = 4$. Поэтому

$$x^3 - 3x^2 - 16 = (x - 4)(x^2 + x + 4).$$

Квадратный трехчлен $x^2 + x + 4$ действительных корней не имеет.

Теперь ясно, что функция $a(x)$ подозрительна на экстремум в точке $x = 4$.

$$a(4) = 48, \quad a(0) = -16.$$

Далее,

$$\lim_{x \to +\infty} a(x) = +\infty, \qquad \lim_{x \to -\infty} a(x) = +\infty,$$

$$\lim_{x \to 2(x>2)} a(x) = +\infty, \qquad \lim_{x \to 2(x<2)} a(x) = -\infty.$$

Строим график функции $a(x)$ (рис. 28). Из графика видно, что уравнение (11) имеет три действительных корня в том случае, если $a > 48$. Причем ясно, что $x_1 < 0$, $2 < x_2 < 4$, $x_3 > 4$.

Решение неравенств, содержащих абсолютную величину

Решение неравенства вида $a|f(x)|+b|\varphi(x)|-\psi(x)>0$, содержащего переменную x под знаком абсолютной величины, сводится к решению следующих систем неравенств:

$$\left.\begin{array}{l} f(x)\geqslant 0,\\ \varphi(x)\geqslant 0,\\ af(x)+b\varphi(x)-\psi(x)>0. \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} f(x)\geqslant 0,\\ \varphi(x)\leqslant 0,\\ af(x)-b\varphi(x)-\psi(x)>0. \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} f(x)\leqslant 0,\\ \varphi(x)\geqslant 0,\\ af(x)-b\varphi(x)+\psi(x)<0. \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} f(x)\leqslant 0,\\ \varphi(x)\leqslant 0,\\ af(x)+b\varphi(x)+\psi(x)<0. \end{array}\right\}$$

Пример 4. Решить неравенство

$$x^2+2x-3|x+1|+3>0. \tag{12}$$

Это неравенство эквивалентно двум системам неравенств:

$$\left.\begin{array}{l} x+1\geqslant 0,\\ x^2+2x-3(x+1)+3>0. \end{array}\right\} \tag{13}$$

$$\left.\begin{array}{l} x+1<0,\\ x^2+2x-3(-x-1)+3>0. \end{array}\right\} \tag{14}$$

Система неравенств (13) эквивалентна следующей:

$$\left.\begin{array}{l} x+1\geqslant 0,\\ x^2-x>0. \end{array}\right\} \tag{15}$$

Квадратный трехчлен x^2-x имеет корни $x_1=0$, $x_2=1$. Поэтому система неравенств (15) эквивалентна такой системе:

$$\left.\begin{array}{l} x\geqslant -1,\\ x<0 \text{ или } x>1. \end{array}\right\} \tag{16}$$

Из (16) получаем

$$-1\leqslant x<0 \text{ или } x>1.$$

Система неравенств (14) эквивалентна следующей:

$$\left.\begin{array}{l} x+1<0,\\ x^2+5x+6>0. \end{array}\right\} \tag{17}$$

Находим корни квадратного трехчлена x^2+5x+6:

$$x_1=-2,\ x_2=-3.$$

Поэтому система неравенств (17) эквивалентна такой системе:

$$\left.\begin{array}{l} x < -1, \\ x < -3 \text{ или } x > -2. \end{array}\right\}$$

Отсюда $x < -3$ или $-2 < x < -1$.

Таким образом, неравенство (12) справедливо на

$$(-\infty, -3), (-2,0) \text{ и } (1, +\infty).$$

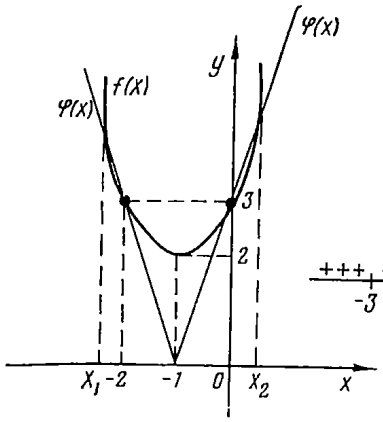


Рис. 29

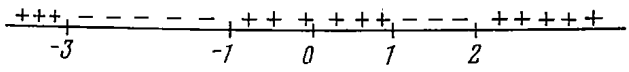


Рис. 30

Этот ответ можно получить и следующим образом. Приведем неравенство (12) к виду

$$x^2 + 2x + 3 > 3|x + 1|. \tag{18}$$

Строим графики функций $f(x) = x^2 + 2x + 3$ и $\varphi(x) = 3|x + 1|$ (рис. 29).

Из рис. 29 видно, что левая часть неравенства (18) больше правой части на интервалах:

$$(-\infty, x_1), (-2, 0) \text{ и } (x_2, +\infty).$$

Так как $x_1 < -2$, т. е. $x_1 + 1 < 0$, то для определения x_1 решаем уравнение

$$x^2 + 2x + 3 = -3(x + 1).$$

Получаем $x_1 = -3$.

Так как $x_2 > 0$, т. е. $x_2 + 1 > 0$, то для определения x_2 решаем уравнение

$$x^2 + 2x + 3 = 3(x + 1).$$

Получаем $x_2 = 1$.

Решение неравенств методом интервалов

Дано неравенство $F(x) > 0$ и требуется определить все его решения, принадлежащие отрезку $[a, b]$. Пусть функция $y = F(x)$ непрерывна на $[a, x_1)$; (x_1, x_2); ...; $(x_n, b]$. Находим нули функции $y = F(x)$. Полагаем для определенности, что $F(x) = 0$ при $x = c$ и $x = d$ и $c \in (x_1, x_2)$; $d \in (x_n, b]$. Итак, $y = F(x) \neq 0$ на

$$[a, x_1); (x_1, c); (c, x_2); \ldots; (x_n, d); (d, b].$$

Из этих промежутков берем по одному произвольному числу: $m_1 \in [a, x_1)$; $m_2 \in (x_1, c)$; $m_3 \in (c, x_2)$ и т. д. Вычисляем $F(m_1)$, $F(m_2)$, $F(m_3)$ и т. д. Пусть, например, $F(m_2) > 0$, $F(m_3) > 0$. Тогда в силу непрерывности функции $y = F(x)$ на (x_1, c) и (c, x_2) решениями неравенства $F(x) > 0$ будут все точки интервалов (x_1, c) и (c, x_2).

Пример 5. Решить неравенство

$$x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6 > 0. \tag{19}$$

Находим действительные корни многочлена, стоящего в левой части неравенства (19): $x_1 = -3$; $x_2 = -1$; $x_3 = 1$; $x_4 = 2$ (применили свойства рациональных корней, см. § 3 гл. 1).

Теперь левую часть неравенства (19) можно разложить на множители:

$$x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6 = (x-1)(x+1)(x-2)(x+3) > 0. \tag{20}$$

Перепишем левую часть неравенства (20) в порядке убывания ее множителей:

$$(x+3)(x+1)(x-1)(x-2) > 0. \tag{21}$$

Числа -3, -1, 1, 2 делят всю числовую ось на пять частей (рис. 30): $(-\infty, -3)$, $(-3, -1)$, $(-1, 1)$, $(1, 2)$, $(2, +\infty)$.

На $(-\infty, -3)$ все множители, входящие в левую часть неравенства (21), отрицательны. Поэтому интервал $(-\infty, -3)$ является решением неравенства (19).

На $(-3, -1)$ $x+3 > 0$, $x+1 < 0$, $x-1 < 0$, $x-2 < 0$. Поэтому интервал $(-3, -1)$ не является решением неравенства (19).

На $(-1, 1)$

$$x+3 > 0,\ x+1 > 0,\ x-1 < 0,\ x-2 < 0.$$

Следовательно, интервал $(-1, 1)$ является решением неравенства (19).

На $(1, 2)$ $x+3 > 0$, $x+1 > 0$, $x-1 > 0$, $x-2 < 0$.

Интервал $(1, 2)$ не является решением неравенства (19).

На $(2, +\infty)$ $x+3 > 0$, $x+1 > 0$, $x-1 > 0$, $x-2 > 0$. Поэтому интервал $(2, +\infty)$ является решением неравенства (19).

Таким образом, решением неравенства (19) являются интервалы $(-\infty, -3)$, $(-1, 1)$ и $(2, +\infty)$.

Эти интервалы разделяются интервалами $(-3, -1)$ и $(1, 2)$, на которых

$$(x+3)(x+1)(x-1)(x-2) < 0.$$

Пример 6. Решить неравенство

$$x^4 - 3x^3 - x + 3 < 0. \tag{22}$$

Находим действительные корни многочлена $M(x) = x^4 - 3x^3 - -x + 3$:

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 3.$$

Теперь левую часть неравенства (22) можно разложить на множители:

$$M(x) = (x-1)(x-3)(x^2 + x + 1) < 0. \tag{23}$$

Многочлен $x^2 + x + 1$ не имеет действительных корней и положителен на всей числовой оси.

Поэтому неравенство (23) эквивалентно следующему неравенству:

$$(x-1)(x-3) < 0.$$

Точки 1 и 3 делят числовую ось на три интервала:

$$(-\infty, 1), (1, 3), (3, +\infty).$$

На $(-\infty, 1)$

$$x - 1 < 0, \quad x - 3 < 0.$$

Поэтому $(x-1)(x-3) > 0$ на $(-\infty, 1)$ и на $(3, +\infty)$, а на $(1, 3)$

$$(x-1)\ (x-3) < 0,$$

откуда $1 < x < 3$.

Пример 7. Решить неравенство

$$x^5 - x^3 - x^2 + 1 < 0.$$

Разложим левую часть на множители:

$$x^5 - x^3 - x^2 + 1 = x^3(x^2 - 1) - (x^2 - 1) =$$

$$= (x^2 - 1)(x^3 - 1) = (x-1)^2(x+1)(x^2 + x + 1) < 0. \tag{24}$$

Квадратный трехчлен $x^2 + x + 1 > 0$ при всех значениях x. Множитель $(x-1)^2$ неотрицателен на всей числовой оси. Поэтому неравенство (24) эквивалентно неравенству $x + 1 < 0$, следовательно, $x < -1$.

Графический метод решения неравенств, содержащих параметры

Пусть дано неравенство $F(x, a) < 0$ и требуется решить его относительно переменной x (a — параметр). Решаем уравнение

$F(x, a) = 0$ относительно параметра a. Получаем $a = f(x)$. Строим график функции $a = f(x)$. По графику определяем множество решений данного неравенства.

Пример 8. Решить относительно x неравенство

$$4x^2 + (a - 2)x + (a - 5) < 0. \tag{25}$$

Рассмотрим уравнение

$$4x^2 + (a - 2)x + (a - 5) = 0. \tag{26}$$

Решив это уравнение относительно a, получаем

$$a = \frac{-4x^2 + 2x + 5}{x + 1}, \quad x \neq -1.$$

Исследованием функции

$$a(x) = \frac{-4x^2 + 2x + 5}{x + 1}$$

мы занимались в связи с решением примера 2 (см. рис. 27). Графику этой функции принадлежат точки, координаты (a, x) которых являются решением уравнения (26).

Решив неравенство (25) относительно a, получаем:

$$1)\ a < \frac{-4x^2 + 2x + 5}{x + 1}, \tag{27}$$

если $x + 1 > 0$, т. е. если $x > -1$;

$$2)\ a > \frac{-4x^2 + 2x + 5}{x + 1}, \tag{28}$$

если $x + 1 < 0$, т. е. если $x < -1$.

Часть плоскости, координаты (a, x) точек которой удовлетворяют неравенству (27), на рис. 27 заштрихована наклонными линиями.

Часть плоскости, координаты (a, x) точек которой удовлетворяют неравенству (28), заштрихована вертикальными линиями.

Чтобы получить решение неравенства (25) при определенном значении параметра a, проводят через соответствующую точку на оси Oa прямую, параллельную оси Ox. Абсциссы точек отрезка этой прямой, ограниченного точками графика функции $a(x)$, являются решениями неравенства (25) при выбранном значении параметра a.

Для записи решения неравенства (25) решим уравнение (26) относительно x:

$$x_1 = \frac{(2 - a) + \sqrt{a^2 - 20a + 84}}{8};$$

$$x_2 = \frac{(2-a) - \sqrt{a^2 - 20a + 84}}{8}.$$

Очевидно, $x_1 > x_2$. Поэтому точки, координаты (x, a) которых удовлетворяют уравнению

$$x = \frac{(2-a) + \sqrt{a^2 - 20a + 84}}{8},$$

принадлежат кривым AM и BE.

Точки, координаты которых удовлетворяют уравнению

$$x = \frac{(2-a) - \sqrt{a^2 - 20a + 84}}{8},$$

принадлежат кривым AK и BD.

Получаем ответ: если $a < 6$ или $a > 14$, то

$$\frac{(2-a) - \sqrt{a^2 - 20a + 84}}{8} < x < \frac{(2-a) + \sqrt{a^2 - 20a + 84}}{8}.$$

Упражнения

1. Решить системы уравнений:

1) $\left.\begin{aligned} x^3 + 2x^2y - xy^2 - 2y^3 = 0, \\ x^2 + y^2 = 8; \end{aligned}\right\}$

2) $\left.\begin{aligned} xy = 6, \\ yz = 3, \\ xz = 2; \end{aligned}\right\}$

3) $\left.\begin{aligned} (x+y)^2 - z^2 = 4, \\ (y+z)^2 - x^2 = 2, \\ (z+x)^2 - y^2 = 3; \end{aligned}\right\}$

4) $\left.\begin{aligned} x + y + z = 4, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 14, \\ xy + xz - yz = 5; \end{aligned}\right\}$

5) $\left.\begin{aligned} x^2 + xy + 4xz - 4z^2 = 0, \\ y^2 + xy + 4yz - 8z^2 = 0, \\ xyz = 8. \end{aligned}\right\}$

2. Решить систему уравнений с четырьмя неизвестными:

$$\left.\begin{aligned} xy + xz + yz = 27, \\ yz + ty + tz = 0, \\ zx + tz + tx = 0, \\ xy + tx + ty = 0. \end{aligned}\right\}$$

3. Решить неравенства: 1) $x^2 - |3x + 2| + x \geqslant 0$;

2) $x^8 + x^6 - 4x^4 + x^2 + 1 \geqslant 0$.

4. Решить систему неравенств:

$$\left.\begin{aligned} x^4 + 4x^3 - 8x + a < 0, \\ 4 - x < 0. \end{aligned}\right\}$$

5. Известно, что система уравнений

$$\left.\begin{aligned} a(x^2 + y^2) + x + y = b, \\ y - x = b \end{aligned}\right\}$$

имеет действительные решения при любом действительном b. Доказать, что $a=0$.

6. Решить систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned} x + y + z = 3, \\ 2xy - 2y - z^2 = 4. \end{aligned}\right\}$$

7. Построить график функции $y = |x^2 - x - 2| + 1$.

8. Построить графики уравнений $2x - 3|y| = 1$ и $|x| + 2y = 4$. Решить систему уравнений (графически и аналитически):

$$\left.\begin{aligned} 2x - 3|y| = 1, \\ |x| + 2y = 4. \end{aligned}\right\}$$

9. Корни уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ действительны. Увеличить меньший корень и уменьшить больший корень на единицу. Составить новое уравнение, для которого полученные два числа являются корнями.

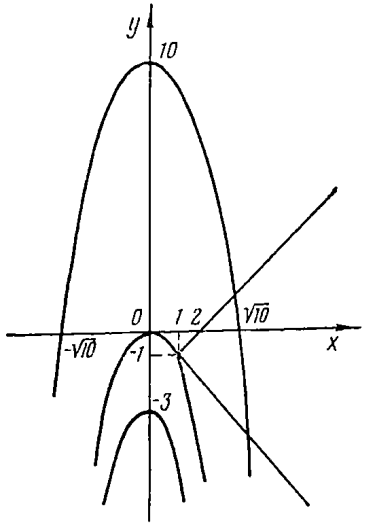


Рис. 31

10. Построить в одной и той же системе координат графики уравнений

$$x - |y + 1| = 1, \qquad (а)$$

$$x^2 + y = 10. \qquad (б)$$

По построенным графикам найти (с точностью до 0,1) решения системы уравнений (а) и (б). Уточнить полученные решения этой системы вычислением.

11. На рис. 31 изображены графики уравнений $x - |y + 1| = 1$, $x^2 + y = a$ (для некоторых значений параметра a). Назвать эти значения a. Определить в системе уравнений

$$\left.\begin{aligned} x - |y + 1| = 1, \\ x^2 + y = a \end{aligned}\right\}$$

множество значений a, при которых эта система: 1) имеет одно решение; 2) имеет два решения; 3) не имеет решений.

12. Построить графики уравнений: $xy = 3$, $x^2 + y^2 = 4$, $x^4 + y^4 = 16$, $x^6 + y^6 = 64$. Как изменяется форма фигуры, ограниченной графиком уравнения $x^n + y^n = 2^n$ с увеличением n? К какой линии стремится этот график, если $n \to +\infty$ (n — целое положительное число)?

13. Пусть m и k — число решений соответственно систем уравнений

$$\left.\begin{aligned} x^n + y^n = 2^n, \\ xy = 3 \end{aligned}\right\} \text{ и } \left.\begin{aligned} x^2 + y^2 = 4, \\ xy = 3 \end{aligned}\right\} \quad (n > 2).$$

Верно ли неравенство $m \geqslant k$?

14. Решить систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} x+y+xy&=7,\\ x^2+y^2+xy&=13. \end{aligned}\right\}$$

15. 1) Построить графики уравнений:

$$y=|x+1|,\quad y=|x-1|,\quad y=|x+1|+|x-1|.$$

2) Указать множество значений a, при которых уравнение

$$|x+1|+|x-1|=a$$

не имеет действительных решений.

16. Найти все пары целых чисел x и y, удовлетворяющих уравнению $x^2-xy+5y=121$.

17. 1) Построить графики уравнений: $y-|x-1|=0$, $y=|x+2|$, $y=|x+2||x-1|$.

2) Решить неравенство $|x-1||x+2|\geqslant 4$.

18. При каких значениях a решения $(x,\ y)$ системы уравнений

$$\left.\begin{aligned} ax-4y&=a+1,\\ 2x+2ay&=-1 \end{aligned}\right\}$$

таковы, что $x>0$, $y<0$?

19. При каких значениях m система уравнений

$$\left.\begin{aligned} (m+1)x-my&=4,\\ 3x-5y&=m \end{aligned}\right\}$$

имеет такие решения $(x,\ y)$, для которых $x-y<2$?

20. Найти сумму квадратов корней уравнения $x^2+px+q=0$, не решая его.

21. Построить графики уравнений $|2x+3y|=5$, $|2x-3y|=1$. Решить систему этих уравнений.

22. Построить графики уравнений $|x|+|y|=5$, $xy=-6$. Решить систему этих уравнений.

23. Доказать, что если функция $y=ax^2+bx+c$ принимает целые значения при всех целых x, то $2a$, $2b$, c — целые числа.

24. Определить, между какими двумя наиболее близкими друг к другу целыми числами расположены коэффициенты p и q уравнения $x^2+px+q=0$, если его корни x_1 и x_2 удовлетворяют неравенствам $-5<x_1<-4$, $2<x_2<3$.

25. Найти $x^4+y^4+z^4$, зная, что $x+y+z=0$ и $x^2+y^2+z^2=a$.

26. Составить уравнение второй степени, один из корней которого был бы равен сумме, а другой произведению корней уравнения $ax^2+bx+c=0$.

27. При каких значениях a неравенство $x^2-(8a-2)x+15a^2-2a-7>0$ выполняется: 1) при всех действительных значениях x; 2) при всех действительных значениях x, кроме одного?

28. Решить относительно x неравенство $2x+3(ax-8)+\frac{x}{3}<4(x+0{,}5)-5$.

29. Построить графики функций: $y=-|x|$, $y=2|x+6|$, $y=|x-6|$, $y=2|x+6|-|x|+|x-6|$ и с их помощью: 1) найти множество решений уравнения $2|x+6|-|x|+|x-6|=a$, если $a=18$ и $a=6$;

2) определить число решений уравнения

$$2|x+6|-|x|+|x-6|=a,$$

если $a<6$, $6<a<18$, $a>18$, и решить неравенство

$$6<2|x+6|-|x|+|x-6|<18;$$

3) решить графически систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} y - |x-6| &= 0, \\ |x+6| &= 0{,}5y \end{aligned}\right\}$$

и уточнить графические решения этой системы с помощью вычислений

4) решить систему неравенств:

$$\left.\begin{aligned} y - |x-6| &> 0, \\ |x+6| &> 0{,}5y. \end{aligned}\right\}$$

30. Построить график уравнения $y = |x^2 - |x||$ и найти множество значений a, при которых уравнение $|x^2 - |x|| = a$ имеет различное число решений (четыре, три, два, шесть или ни одного).

Решить неравенство

$$|x^2 - |x|| < 0{,}25.$$

31. 1) Построить график функции $y = |2-x| + |3-x| + |7-x|$. Определить по графику ее наименьшее значение. Почему наименьшее значение эта функция принимает в одной из тех точек, в которых одно из слагаемых $|2-x|$, $|3-x|$, $|7-x|$ обращается в нуль?

2) Найти наименьшее значение функции

$$y = |a_1 - x| + |a_2 - x| + |a_3 - x|,$$

если $a_1 < a_2 < a_3$.

32. Определить, при каких значениях a все корни уравнения

$$x^3 - ax + (2a - 8) = 0$$

действительны.

33. Построить графики уравнений $x + y + 8 = 0$, $x^2 + y^2 + 6x + 2y = 0$ и найти множество значений a, при которых система уравнений

$$\left.\begin{aligned} x + y + a &= 0, \\ x^2 + y^2 + 6x + 2y &= 0 \end{aligned}\right\}$$

не имеет действительных решений.

34. Решить уравнения $2x^3 - 5x^2 + 6x - 2 = 0$ и $6x^3 - 3x^2 - 2x + 1 = 0$, если известно, что они имеют общий корень.

35. 1) Построить графики функций $y_1 = 27x^3$, $y_2 = -9x^2 + 48x - 20$; 2) решить уравнение $27x^3 + 9x^2 - 48x + 20 = 0$, если известно, что два из его корней равны друг другу.

§ 4. Рациональные уравнения и неравенства

Решение уравнений с двумя параметрами[1]

Общий вид уравнения относительно x с двумя параметрами a и b

$$F(x, a, b) = 0. \qquad (1)$$

Очевидно, что каждой паре чисел (a, b) функция F ставит в соответствие определенное значение x.

[1] Материал для этого пункта заимствован из статьи А. Я. Маргулиса, А. Г. Мордковича, Б. А. Радунского «Еще раз об уравнениях с параметрами» («Квант», 1970, № 12).

Упорядоченную пару чисел (a, b) можно интерпретировать как точку на координатной плоскости. В этом случае устанавливается взаимно однозначное соответствие между всеми уравнениями вида (1), если F задана, и точками плоскости.

Введем прямоугольную систему координат aOb и каждому уравнению вида (1) поставим в соответствие точку плоскости aOb с координатами (a, b). Эта координатная плоскость называется плоскостью параметров. Такое соответствие дает возможность наглядно представить множество допустимых значений параметров.

Поясним сказанное примером.

Пример 1. Решить уравнение

$$\frac{2a+b}{a+x}-\frac{2a-b}{a-x}-\frac{2a}{b}=0. \qquad (2)$$

Построим прямоугольную систему координат aOb (рис. 32). На этой плоскости будем постепенно отмечать те ее точки, координаты (a, b) которых не являются допустимыми значениями параметров данного уравнения (2).

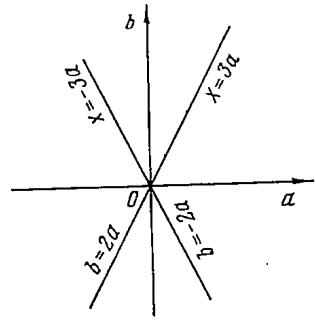


Рис. 32

Очевидно, при $b=0$ уравнение (2) не имеет смысла, т. е. для любой пары чисел $(a, 0)$ это уравнение не имеет решений. Итак, из дальнейшего рассмотрения исключаются все точки, расположенные на оси Oa.

Пусть

$$b\neq 0 \text{ и } x\neq \pm a. \qquad (3)$$

В этом случае после освобождения от знаменателей и приведения подобных членов уравнение (2) приводится к виду

$$a(x^2-2bx+b^2-a^2)=0. \qquad (4)$$

Теперь ясно, что если $a=0$, то решением уравнения (4) в силу условия (3) является любое значение x, отличное от нуля.

Итак, для всякой пары чисел $(0, b)$, кроме $b=0$, решениями уравнения (2) являются любые числа, кроме $x=0$.

Если $a\neq 0$, $b\neq 0$, $x\neq \pm a$, то уравнение (4) эквивалентно такому:

$$x^2-2bx+b^2-a^2=0.$$

Его решения: $x_1=b+a$, $x_2=b-a$.

Эти решения получены в предположении, что $x\neq \pm a$. Поэтому рассмотрим случаи, когда $x_1=\pm a$ или $x_2=\pm a$.

Если $x_1=a$ или $x_2=-a$, то $b=0$. Но $b\neq 0$. Следовательно, $x_1\neq a$ и $x_2\neq -a$.

Если $x_1=-a$, т. е. $b+a=-a$, то $b=-2a$. Но тогда $x_2=-3a$.

Таким образом, если $b = -2a$, то уравнение (2) имеет единственное решение $x = -3a$ (рис. 32).

Если $x_2 = a$, т. е. $b - a = a$, то $b = 2a$. Но в этом случае $x_1 = 3a$. Поэтому если $b = 2a$, то уравнение (2) имеет единственное решение $x = 3a$ (рис. 32).

Итак:

1) если $b = 0$, a — любое вещественное число, то уравнение (2) решений не имеет;

2) если $b \neq 0$, $a = 0$, то решениями уравнения (2) являются все вещественные числа, не равные нулю;

3) если $b = -2a$, $b \neq 0$, то $x = -3a$;

4) если $b = 2a$, $b \neq 0$, то $x = 3a$;

5) если $a \neq 0$, $b \neq 0$, $b \neq \pm 2a$, то $x_1 = b + a$, $x_2 = b - a$.

Решение неравенств с параметрами

При решении неравенств, содержащих параметры, используются в основном метод интервалов и графический метод (см. § 3 гл. 3).

Пример 2. Решить относительно x неравенство

$$\frac{1}{x} + ax > 1. \tag{5}$$

Очевидно, относительно x неравенство (5) является неравенством второй степени, относительно a — первой степени. Исходя из этого, изложим три способа решения этого неравенства и сделаем выводы об их особенностях.

Способ 1. Преобразуем неравенство (5) к виду

$$\frac{ax^2 - x + 1}{x} > 0. \tag{6}$$

Найдем корни квадратного уравнения

$$ax^2 - x + 1 = 0: \tag{7}$$

$$x_1 = \frac{1 + \sqrt{1 - 4a}}{2a}, \quad x_2 = \frac{1 - \sqrt{1 - 4a}}{2a}.$$

Теперь ясно, что если $a > 0{,}25$, то уравнение (7) не имеет действительных корней. В этом случае $ax^2 - x + 1 > 0$ при всех действительных значениях x, и поэтому неравенство (6) имеет решение $x > 0$.

При $a = 0{,}25$ $x_1 = x_2 = 2$ и неравенство имеет решения

$$0 < x < 2, \ x > 2.$$

Пусть $a < 0{,}25$. В этом случае квадратный трехчлен имеет различные действительные корни x_1 и x_2. Поэтому неравенство (6) можно преобразовать к виду

$$\frac{a(x-x_1)(x-x_2)}{x} > 0. \qquad (8)$$

Если $0 < a < 0{,}25$, то неравенство (8) эквивалентно неравенству

$$\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{x} > 0;\ x_1 > 0,\ x_2 > 0,\ x > 0.$$

Отсюда

$$x > x_1,\ 0 < x < x_2.$$

Если $a < 0$, то неравенство (8) эквивалентно неравенству

$$\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{x} < 0;\ x_1 < 0,\ x_2 > 0.$$

Отсюда

$$x < x_1,\ 0 < x < x_2.$$

При $a = 0$ неравенство (6) имеет вид

$$\frac{1}{x} > 1.$$

Отсюда $0 < x < 1$.

Окончательно получим:

1) если $a < 0$, то $x < \frac{1+\sqrt{1-4a}}{2a}$ или $0 < x < \frac{1-\sqrt{1-4a}}{2a}$;

2) если $a = 0$, то $0 < x < 1$;

3) если $0 < a < 0{,}25$, то $x > \frac{1+\sqrt{1-4a}}{2a}$ или $\frac{1-\sqrt{1-4a}}{2a} > x > 0$;

4) если $a = 0{,}25$, то $0 < x < 2$ или $x > 2$;

5) если $a > 0{,}25$, то $x > 0$.

Способ 2. Преобразуем неравенство (5) к виду

$$\frac{1}{x} - 1 > -ax. \qquad (9)$$

Обозначим

$$f(x) = \frac{1}{x} - 1,\ \varphi(x) = -ax.$$

Построим графики функций $f(x)$ и $\varphi(x)$ (при $a = 0$; -1; -2; -3; 0,2; 1) (рис. 33).

Из всех графиков функций $\varphi(x)$ особо выделим тот, который касается гиперболы

$$f(x) = \frac{1}{x} - 1 \text{ (в точке } A).$$

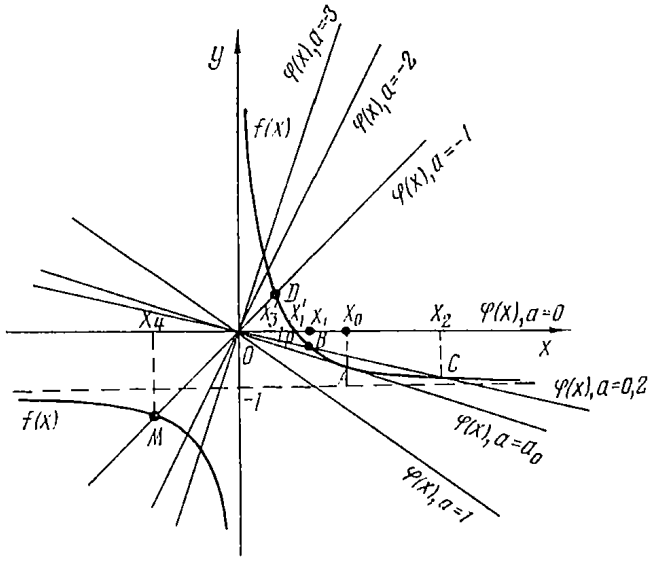


Рис. 33

Касание графиков $f(x)$ и $\varphi(x)$ означает, что уравнение

$$\frac{1}{x} - 1 = -ax \text{ или } 1 - x + ax^2 = 0 \qquad (10)$$

имеет только один корень.

Установим, при каком значении параметра a этот случай будет иметь место. Дискриминант квадратного уравнения (10) должен быть равен нулю:

$$D = 1 - 4a = 0, \text{ т. е. } a = a_0 = 0{,}25.$$

Отсюда ясно, что при $a = 0{,}25$ график функции $\varphi(x)$ касается графика функции $f(x)$.

«Прочитав» графики функций $f(x)$ и $\varphi(x)$, получаем: если $0 \leqslant a < 0{,}25$, то график функции $f(x)$ расположен выше графика функции $\varphi(x)$ на $(0, x_1)$ и $(x_2, +\infty)$, где x_1 и x_2 — корни уравне-

ния (10). Таким образом, решениями данного неравенства (9) являются точки, принадлежащие $(0, x_1)$ и $(x_2, +\infty)$.

Если $a = 0$, то $0 < x < 1$.

Если $a < 0$, то $0 < x < x_3$ или $x < x_4$ (x_3 и x_4 — корни уравнения (10). Причем ясно, что $x_4 < 0$, $0 < x_3 < 1$).

Если $a > 0{,}25$, то $x > 0$.

Если $a = 0{,}25$, то $0 < x < x_0$ или $x > x_0$ (x_0 — действительный корень уравнения (10); $x_0 = 2$).

Способ 3. Преобразуем неравенство (5) к следующему виду:

$$a > \frac{1 - \frac{1}{x}}{x} = \frac{x-1}{x^2}, \text{ если } x > 0; \tag{11}$$

$$a < \frac{1 - \frac{1}{x}}{x} = \frac{x-1}{x^2}, \text{ если } x < 0. \tag{12}$$

Построим график функции

$$a = a(x) = \frac{x-1}{x^2}.$$

Функция $a(x)$ определена на всей числовой оси, кроме $x = 0$.

$$\lim_{x \to +\infty} a(x) = 0, \quad \lim_{x \to -\infty} a(x) = 0, \quad \lim_{x \to 0} a(x) = -\infty, \quad a(1) = 0.$$

Находим экстремальные точки:

$$a'(x) = \frac{x(2-x)}{x^4}.$$

$$a'(2) = 0, \quad a(2) = 0{,}25.$$

Теперь ясно, что при $x = 2$ функция $a(x)$ достигает наибольшего значения.

Установленных свойств функции $a(x)$ достаточно для построения такого ее графика (рис. 34), по которому можно провести исследование решений неравенства (5).

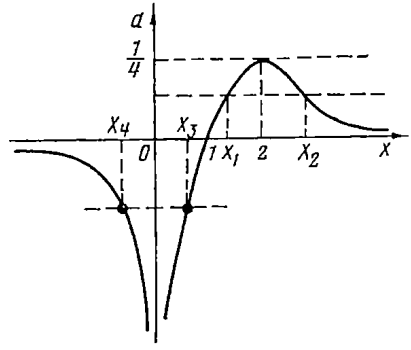


Рис. 34

«Прочитав» график функции $a(x)$, с учетом условий (11) и (12) получаем уже найденные решения неравенства (5).

Сравнивая все три решения неравенства (5), можно заметить, что последнее решение является наиболее изящным, так как исследование функции и построение ее графика дает возможность наиболее

наглядно обозреть все свойства этого неравенства. В этом случае график функции играет ту же роль, что и чертеж при решении геометрической задачи.

Упражнения

1. Решить систему уравнений:

1) $\left.\begin{aligned} &x+y+z=6,\\ &xyz=8,\\ &\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1{,}5; \end{aligned}\right\}$

2) $\left.\begin{aligned} &\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}=3,\\ &\frac{y}{x}+\frac{z}{y}+\frac{x}{z}=3,\\ &x+y+z=3. \end{aligned}\right\}$

2. 1) Построить графики функций $y=2-\frac{1}{x}$, $y=2x^{-2}-x^2$; 2) сколько положительных решений имеет уравнение $2-x^{-1}=2x^{-2}-x^2$?

3. Решить уравнение $a^2-\frac{a^2-1}{2x-x^2}=\frac{x+2}{x-2}$.

4. 1) Построить график функции $y=x+x^{-1}$; 2) при каком значении a уравнение $x+x^{-1}=ax+1$ имеет одно положительное решение?

5. 1) Построить графики уравнений $\frac{5-x}{3x-2}=y$, $x^2+y^2=25$; 2) сколько действительных решений имеет система этих уравнений? 3) существуют ли такие значения a, при которых система уравнений

$$\left.\begin{aligned} y&=\frac{5-x}{3x-2},\\ y^2+x^2&=a^2 \end{aligned}\right\}$$

имеет решения (x, y), удовлетворяющие равенству $x=y$?

6. На рис. 35 изображен график функции

$$y=\frac{ax+k}{bx+c}.$$

Записать ее аналитическое выражение.

7. 1) Построить графики функций: $y_1=|x-3|+|x+1|$, $y_2=|x+3|+|x-1|$, $y_3=y_1:y_2$; 2) при каких значениях a уравнение $y_3=a$ имеет только два решения?

8. Решить неравенство $\frac{x^2-|x|-12}{x-3}\geqslant 2x$.

9. При каких значениях p система неравенств

$$-9<\frac{3x^2+px-6}{x^2-x+1}<6$$

удовлетворяется всеми действительными значениями x?

10. Построить график функции $y = \dfrac{x}{x^2+1}$.

11. Построить графики функций $y_1 = \dfrac{x-2}{x+2}$ и $y_2 = \dfrac{2x-3}{4x-1}$ и решить неравенство $y_1 \geqslant y_2$.

12. Определить действительные корни уравнения

$$x^3 + x^2 + x^{-3} + x^{-2} + x + x^{-1} = 6.$$

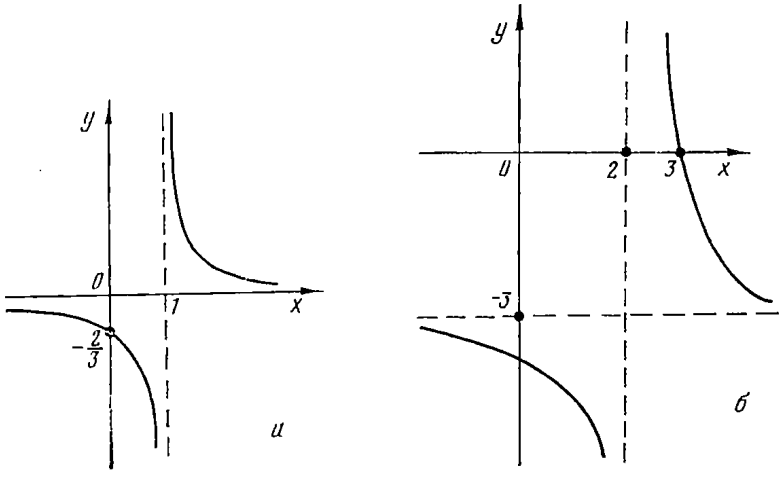


Рис. 35

13. 1) Построить графики функций $y_1 = x^2 - 2x + 3$, $y_2 = x^2 - 4x + 3$, $y_3 = y_1 : y_2$; 2) сколько действительных корней имеет уравнение $y_3 = -x$?

14. Решить неравенство $\dfrac{(1+x)(2+x)}{x^2 - |x| - 2} \geqslant -3x$.

15. Найти все значения a, при которых для всех $|x| \leqslant 1$ выполняется неравенство $\dfrac{ax - a(1-a)}{a^2 - ax - 1} > 0$.

16. 1) Построить графики функций $y_1 = (x+1)^{-1}$, $y_2 = (x+3)^{-1}$, $y_3 = 1 - x(x+2)^{-1}$, $y_4 = y_1 + y_2$; 2) доказать, что уравнение $(x+1)^{-1} + (x+3)^{-1} + x(x+2)^{-1} = 1$ не имеет действительных решений.

17. 1) Построить графики уравнений $y = (x-2)^{-1}$, $y = x^{-1}$, $y = (x+2)^{-1}$; 2) решить уравнения $x^{-1} + (x+2)^{-1} = 0$ и $x^{-1} + (x+a)^{-1} = 0$; 3) решить неравенства $x^{-1} + (x+2)^{-1} > 0$, $x^{-1} + (x+a)^{-1} > 0$.

18. 1) Построить график функции $y = \left| \dfrac{ax-5}{3} + x \right|$ при некоторых значениях параметра a; 2) решить относительно x неравенство $\left| \dfrac{ax-5}{3} + x \right| < 3$.

19. Определить множество значений a, при которых уравнение

$$(1+a)\left(\frac{x^2}{x^2+1}\right)^2 - 3a\left(\frac{x^2}{x^2+1}\right) + 4a = 0$$

не имеет вещественных корней.

20. Решить относительно x неравенство $(2ax+3):(5x-4a)<4$.

21. При каких действительных значениях a тождественно истинным является двойное неравенство

$$1<\frac{ax^2+3x+4}{x^2+2x+2}<5?$$

22. Определить действительные решения системы уравнений

$$\left.\begin{aligned} 4\cdot\frac{y+z}{y^2z^2}&=3x,\\ 4\cdot\frac{x+z}{x^2z^2}&=3y,\\ \frac{x+y}{x^2y^2}&=2z. \end{aligned}\right\}$$

23. Решить систему уравнений:

$$1)\ \left.\begin{aligned} \frac{x+y}{xyz}&=\frac{7}{12},\\ \frac{y+z}{xyz}&=\frac{5}{12},\\ \frac{z+x}{xyz}&=\frac{1}{3}. \end{aligned}\right\}\qquad 2)\ \left.\begin{aligned} 2x\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\right)&=15,\\ 3y\left(\frac{z}{x}+\frac{x}{z}\right)&=20,\\ 6z\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)&=13. \end{aligned}\right\}$$

§ 5. Иррациональные уравнения и неравенства

Уединение радикала и возведение в степень обеих частей уравнения

Этот метод сводится к замене при помощи некоторых преобразований данного иррационального уравнения рациональным. Последнее уравнение может быть эквивалентным иррациональному или являться только его следствием. Эквивалентность не нарушается при возведении обеих частей уравнений (неравенств) в нечетную степень. Посторонние корни иррациональных уравнений исключаются двумя способами: а) подстановкой найденных решений в исходное уравнение; б) проверкой принадлежности найденных решений области определения функции, заданной исходным уравнением.

Пример 1. Решить уравнение

$$2\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}=\sqrt{a-x+\sqrt{x(a+x)}}. \qquad (1)$$

Установим, при каких значениях x определены левая и правая части уравнения.

Корень $\sqrt{a-x}$ определен при $x\leqslant a$. Корень $\sqrt{a+x}$ определен при $x\geqslant -a$. Отсюда ясно, что корень $\sqrt{x(a+x)}$ определен, если $x\geqslant 0$. Следовательно, $a\geqslant 0$ (так как $x\leqslant a$).

Итак, правая часть уравнения определена, если $0\leqslant x\leqslant a\ (a\geqslant 0)$.

Но при этом условии

$$\sqrt{a+x} \geqslant \sqrt{a-x},$$

а тем более и

$$2\sqrt{a+x} - \sqrt{a-x} \geqslant 0.$$

Таким образом, левая часть уравнения определена и неотрицательна при $0 \leqslant x \leqslant a\ (a \geqslant 0)$.

При этих условиях после возведения правой и левой частей уравнения (1) в квадрат получаем эквивалентное ему уравнение

$$4(a+x) - 4\sqrt{a^2-x^2} + (a-x) = a - x + \sqrt{x(a+x)}$$

или

$$4(a+x) - 4\sqrt{a^2-x^2} = \sqrt{x(a+x)}.$$

Разделив обе части последнего уравнения на $\sqrt{x+a} \neq 0$, имеем

$$4(\sqrt{a+x} - \sqrt{a-x}) = \sqrt{x}. \tag{2}$$

Заметим, что $\sqrt{x+a} = 0$ только в том случае, если $x = a = 0$. Следовательно, $x = a = 0$ является корнем уравнения (1).

Возведя уравнение (2) в квадрат и приведя подобные члены, получим

$$32\sqrt{a^2-x^2} = 32a - x. \tag{3}$$

Так как $0 \leqslant x \leqslant a\ (a \geqslant 0)$, то $32a - x \geqslant 0$. Поэтому после возведения уравнения (3) в квадрат получаем эквивалентное ему уравнение $1024(a^2-x^2) = (32a-x)^2$, откуда $x = 64a : 1025$ и $x = 0\ (a > 0)$.

Получаем два ответа: $x_1 = 0\ (a > 0)$ и $x_2 = 64a : 1025\ (a \geqslant 0)$.

Пример 2. Решить неравенство

$$\sqrt[3]{2-x} + \sqrt{x-1} > 1. \tag{4}$$

Левая часть неравенства определена, если $x - 1 \geqslant 0$, т. е. если $x \geqslant 1$. Но при $x = 1$ левая часть неравенства равна правой. Поэтому решения неравенства (4) принадлежат интервалу $(1, +\infty)$.

При этом условии после выполнения некоторых преобразований получаем неравенство, эквивалентное неравенству (4):

$$\sqrt[3]{2-x} > 1 - \sqrt{x-1},$$

$$(\sqrt[3]{2-x})^3 > (1 - \sqrt{x-1})^3,$$

$$\sqrt{x-1}(3 + x - 1) > 4x - 4,$$

$$\sqrt{x-1}(2+x) > 4(x-1). \tag{5}$$

Так как $x > 1$, т. е. $x - 1 > 0$, то, разделив неравенство (5) на $\sqrt{x-1}$, получаем эквивалентное ему неравенство

$$2 + x > 4\sqrt{x-1}. \tag{6}$$

Так как $x > 1$, то после возведения обеих частей неравенства (6) в квадрат получаем эквивалентное неравенство

$$(2 + x)^2 > 16(x - 1)$$

или

$$\left.\begin{array}{c} x^2 - 12x + 20 > 0, \\ x > 1. \end{array}\right\}$$

Квадратный трехчлен $x^2 - 12x + 20$ имеет корни $x_1 = 2$, $x_2 = 10$. Поэтому $x^2 - 12x + 20 > 0$, если $x < 2$ или $x > 10$.

Окончательно $1 < x < 2$, $x > 10$.

Метод вспомогательной неизвестной

Пример 3. Решить уравнение

$$\sqrt[4]{629 - x} + \sqrt[4]{77 + x} = 8. \tag{7}$$

Очевидно, $-77 \leqslant x \leqslant 629$. Обозначим: $629 - x = m^4$, $77 + x = n^4$. Сложив почленно последние два уравнения, имеем

$$m^4 + n^4 = 706.$$

Теперь уравнение (7) свелось к решению системы уравнений

$$\left.\begin{array}{c} m + n = 8, \\ m^4 + n^4 = 706. \end{array}\right\} \tag{8}$$

Решаем систему уравнений (8) следующим образом:

$$(m + n)^2 = 64,$$
$$m^2 + n^2 = 64 - 2mn,$$
$$(m^2 + n^2)^2 = (64 - 2mn)^2,$$
$$m^4 + n^4 = (64 - 2mn)^2 - 2m^2n^2.$$

Но $m^4 + n^4 = 706$. Поэтому

$$(64 - 2mn)^2 - 2m^2n^2 = 706. \tag{9}$$

Обозначим $mn = u$. Тогда уравнение (9) примет вид

$$(64 - 2u)^2 - 2u^2 = 706.$$

Его корни $u_1 = 15$, $u_2 = 113$.

Таким образом, система уравнений (8) сводится к решению двух систем уравнений:

$$\left.\begin{aligned} m+n&=8,\\ mn&=15 \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

и

$$\left.\begin{aligned} m+n&=8,\\ mn&=113. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Система уравнений (10) имеет решения $m_1=3$, $n_1=5$; $m_2=5$, $n_2=3$. Система уравнений (11) действительных решений не имеет. Итак, $629-x=3^4$ или $629-x=5^4$, отсюда $x_1=548$, $x_2=4$.

Пример. 4. Решить относительно x уравнение

$$\sqrt{a-\sqrt{a+x}}=x \quad (a\geqslant 0). \tag{12}$$

Обозначим $\sqrt{a+x}=y$. Получим систему уравнений относительно x и y:

$$\left.\begin{aligned} \sqrt{a-y}&=x,\\ \sqrt{a+x}&=y. \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Очевидно, $a-y\geqslant 0$, т. е. $y\leqslant a$, и $a+x\geqslant 0$, т. е. $x\geqslant -a$. Но так как $x\geqslant 0$ и $y\geqslant 0$, то

$$0\leqslant y\leqslant a,\ x\geqslant 0. \tag{14}$$

При условии (14) система уравнений (3) эквивалентна такой системе:

$$\left.\begin{aligned} a-y&=x^2,\\ a+x&=y^2. \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Вычитаем из второго уравнения системы (15) первое. Получаем

$$x+y=y^2-x^2$$

или

$$x+y=(y-x)(y+x). \tag{16}$$

Так как $x\geqslant 0$ и $y\geqslant 0$, то $x+y=0$ только в том случае, если одновременно $x=y=0$. Если $y=0$, то $a+x=0$, т. е. $x=-a$. Но $\sqrt{a}=-a$ только тогда, если $a=0$.

Итак, $x=a=0$ является корнем уравнения (12).

Если $x+y>0$, то уравнение (16) эквивалентно уравнению $1=y-x$. Отсюда

$$1=\sqrt{a+x}-x,\ 1+x=\sqrt{a+x},$$
$$(1+x)^2=a+x. \tag{17}$$

Корни уравнения (17) $x_{1,2} = 0{,}5\,(-1 \pm \sqrt{4a-3})$.

Исследуем, при каких значениях a эти корни удовлетворяют уравнению (12). Для этого решим уравнение (17) относительно a:

$$a = x^2 + x + 1.$$

Исследуем на экстремум функцию $a(x) = x^2 + x + 1$. $a'(x) = 2x + 1$; $a'(x) = 0$, если $x = -0{,}5$; $a(-0{,}5) = 0{,}75$.

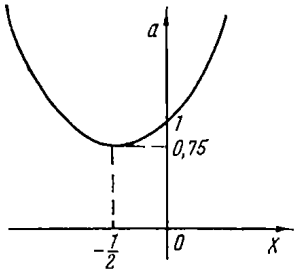


Рис. 36

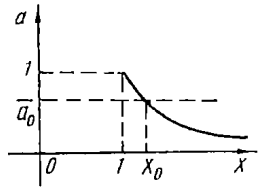


Рис. 37

График функции $a(x)$ показан на рис. 36.

Известно, что $x_{1,2} \geqslant 0$. Из графика видно, что $x_{1,2} \geqslant 0$, если $a \geqslant 1$. Поэтому только $x = 0{,}5\,(-1 + \sqrt{4a-3})$ является корнем уравнения (12).

Окончательный ответ $x_1 = a = 0$; $x_2 = 0{,}5\,(-1 + \sqrt{4a-3})$, если $a \geqslant 1$.

Умножение обеих частей уравнения (неравенства) на выражение, сопряженное с одной из его частей

Этот метод применяется для того, чтобы упростить исследование функций, определяемых данными уравнениями.

Пример 5. Решить неравенство

$$\sqrt{x} - \sqrt{x-1} > a \quad (a > 0).$$

Левая часть этого неравенства определена, если $x - 1 \geqslant 0$, т. е. если $x \geqslant 1$.

Умножим обе части неравенства на положительное число (при всех $x \geqslant 1$) $\sqrt{x} + \sqrt{x-1}$.

Получим

$$(\sqrt{x} - \sqrt{x-1})(\sqrt{x} + \sqrt{x+1}) > a(\sqrt{x} + \sqrt{x-1})$$

или

$$1 > a(\sqrt{x} + \sqrt{x-1}).$$

Отсюда

$$a < \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x-1}}. \qquad (18)$$

Функции $a_1(x) = \sqrt{x}$ и $a_2(x) = \sqrt{x-1}$ положительные, монотонно возрастающие, поэтому и $a_3(x) = \sqrt{x} + \sqrt{x-1}$ положительная, монотонно возрастающая функция. $a_3(1) = 1$. Поэтому $a_3(x)$ на $[1, +\infty)$ изменяется от 1 до $+\infty$. Теперь ясно, что функция

$$a = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x-1}}$$

монотонная. Она определена на $[1, +\infty)$. Область ее изменения $[1,0)$. Строим график функции $a(x)$ (рис. 37).

Из графика видно, что решением неравенства (18) является $[1, x_0)$, если $0 < a \leqslant 1$, где x_0 — корень уравнения

$$\sqrt{x} - \sqrt{x-1} = a.$$

Решим это уравнение:

$$\sqrt{x} - a = \sqrt{x-1}, \quad (\sqrt{x} - a)^2 = (\sqrt{x-1})^2,$$

$$x - 2a\sqrt{x} + a^2 = x - 1, \quad a^2 + 1 = 2a\sqrt{x},$$

$$(a^2 + 1)^2 = 4a^2 x,$$

$$x_0 = \left(\frac{1 + a^2}{2a}\right)^2.$$

Найдем $1 \leqslant x < \left(\frac{1 + a^2}{2a}\right)^2$, $0 < a < 1$.

Графический метод

Сущность этого метода и его достоинства раскрываются в процессе решения примеров.

Пример 6. Решить неравенство

$$\sqrt{1 - x} \geqslant x.$$

Обозначим $y_1 = x$, $y_2 = \sqrt{1 - x}$. Построим графики функций y_1 и y_2 (рис. 38). Пусть x_0 — абсцисса точки пересечения графиков y_1 и y_2. Теперь ясно, что решениями данного неравенства являются $x \leqslant x_0$ и $0 < x_0 < 1$. После этого остается только вычислить значение x_0. Решив уравнение $\sqrt{1 - x} = x$, получаем два корня x_0 и x_1.

В чем главное преимущество рассмотренного решения перед традиционным?

Во-первых, отпадает необходимость в дополнительных исследованиях по определению постороннего корня x_1. Во-вторых, есть возможность наглядно показать учащимся, почему в результате решения уравнения $\sqrt{1-x}=x$ появляется посторонний корень x_1 и почему он отрицательный. На рис. 39 показаны графики функций $y_1=x$ и $y_2=-\sqrt{1-x}$. Абсцисса x_1 точки пересечения графиков

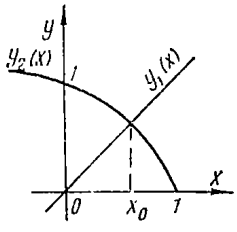


Рис. 38

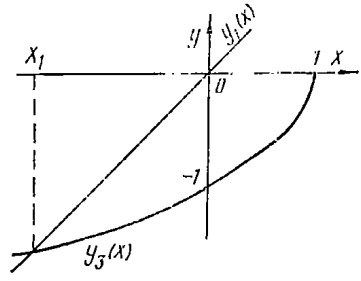


Рис. 39

$y_1(x)$ и $y_3(x)$ является корнем уравнения $-\sqrt{1-x}=x$ и посторонним корнем уравнения $\sqrt{1-x}=x$.

Пример 7. Решить неравенство

$$x-\sqrt{a-x^2}\geqslant 1.$$

Преобразуем данное неравенство к виду

$$x-1\geqslant\sqrt{a-x^2}.$$

Обозначим: $y_1=x-1$, $y_2=\sqrt{a-x^2}$.

Очевидно, $a\geqslant 0$. Графиком y_2 является полуокружность (расположенная в верхней полуплоскости) с центром в точке $x=0$ и радиусом $\sqrt{a}$.

Строим графики y_1 и y_2 (рис. 40).

Крайне важно построить на одном и том же чертеже график y_2 при различных значениях параметра a. Тогда легко заметить, что графики y_1 и y_2 пересекаются, т. е. данное уравнение имеет действительное решение x_0, если $a\geqslant 1$.

Очевидно также, что такое решение x_0 только одно и оно равно 1, если $a=1$, и $1<x_0<\sqrt{a}$, если $a>1$.

Наконец, становится ясным, что решением данного неравенства являются $x_0\leqslant x\leqslant\sqrt{a}$.

Решив уравнение

$$x-\sqrt{a-x^2}=1,$$

получаем два корня. Но после проведенного исследования легко найти среди них посторонний.

Заметим, что промежуток $[x_0, \sqrt{a}]$ увеличивается с увеличением a.

Функциональный подход

При решении уравнений и неравенств этим методом используются свойства непрерывных монотонных функций (свойство 6).

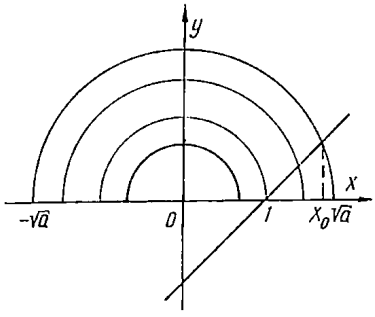


Рис. 40

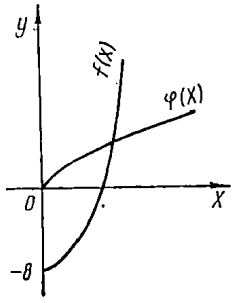


Рис. 41

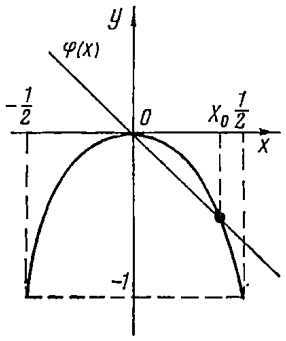


Рис. 42

Пример 8. Доказать, что уравнение

$$\sqrt{x+6} - \sqrt{x-7} = 5$$

не имеет решений.

Умножим обе части этого уравнения на $\sqrt{x+6} + \sqrt{x-7}$:

$$13 = 5(\sqrt{x+6} + \sqrt{x-7});$$
$$2{,}6 = \sqrt{x+6} + \sqrt{x-7}.$$

Функция

$$y = \sqrt{x+6} + \sqrt{x-7}$$

определена на $[7, +\infty)$, положительна и монотонно возрастает.

$$y(7) = \sqrt{13} + 0 > 3{,}6.$$

Следовательно,

$$\sqrt{x+6} + \sqrt{x-7} > 3{,}6 > 2{,}6.$$

Пример 9. Решить уравнение

$$25x^3 - 11x - 6\sqrt{x} - 8 = 0. \tag{19}$$

Левая часть уравнения определена на множестве неотрицательных чисел. Преобразуем уравнение (19) к виду

$$25x^3 - 8 = 11x + 6\sqrt{x}. \tag{20}$$

Обозначим $f(x) = 25x^3 - 8$, $\varphi(x) = 11x + 6\sqrt{x}$.

Очевидно, функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ на $[0, +\infty)$ возрастающие, $f(x)$ — вогнутая, $\varphi(x)$ — выпуклая, так как $\varphi_1(x) = 6\sqrt{x}$ — выпуклая и $\varphi_2(x) = 11x$ — выпуклая. Сумма двух выпуклых функций есть функция выпуклая.

Строим графики функций $f(x)$ и $\varphi(x)$ (рис. 41). Из рис. 41 ясно, что уравнение (19) имеет только один действительный корень $x_1 = 1$.

Функциональный подход упростил поиски решения уравнения (19) в первую очередь благодаря его удачному преобразованию к виду (20). В результате этого преобразования в левой и правой частях уравнения (20) были получены достаточно простые для исследования функции $f(x)$ и $\varphi(x)$.

Поясним сказанное еще одним примером.

Пример 10. Решить неравенство

$$\frac{-1 + \sqrt{1 - 4x^2}}{-x} < 3.$$

Обозначим: $f(x) = \sqrt{1 - 4x^2} - 1$; $\varphi(x) = -x$; $F(x) = f(x) : \varphi(x)$.

Функция $f(x)$ определена на $[-0{,}5;\ 0{,}5]$, $\varphi(x)$ — на $(-\infty,\ 0)$ и $(0,\ +\infty)$. Поэтому функция $F(x)$ определена на $[-0,\ 5;\ 0)$ и $(0;\ 0{,}5]$.

Строим графики функций $f(x)$ и $\varphi(x)$ (рис. 42).

Из графика видно, что полуинтервал $[-0{,}5;\ 0)$ является решением исходного неравенства, так как здесь $F(x) < 0 < 3$, и полуинтервал $(0,\ x_0]$, где x_0 — абсцисса точки пересечения графиков $f(x)$ и $\varphi(x)$, также является решением, потому что здесь $|f(x)| \leqslant |\varphi(x)|$, т. е. $F(x) \leqslant 1 < 3$.

Для определения x_0 решаем уравнение

$$-1 + \sqrt{1 - 4x^2} = -x.$$

Получаем $x_0 = 0{,}4$.

Теперь ясно, что $\varphi(x)$ на $[0{,}4;\ 0{,}5]$ изменяется от $-0{,}4$ до $-0{,}5$, а $f(x)$ — от $-0{,}4$ до -1. Поэтому на $[0{,}4;\ 0{,}5]$

$$F(x) < (-1) : (-0{,}4) = 2{,}5 < 3.$$

Окончательно $-0{,}5 \leqslant x < 0,\ 0 < x \leqslant 0{,}5$.

Решение иррациональных неравенств методом интервалов[1]

Пример 11. Решить неравенство

$$\frac{2\sqrt{x+1}}{1-2\sqrt{3-x}} < 1. \tag{21}$$

Числитель левой части неравенства определен на $[-1, +\infty)$. Корень $\sqrt{3-x}$ определен на $(-\infty, 3]$. Отсюда ясно, что левая часть неравенства (21) определена на $[-1, 3]$, если только этому сегменту не принадлежат корни уравнения

$$1-2\sqrt{3-x}=0.$$

Решаем это уравнение:

$$x_0 = 2{,}75.$$

Так как $x_0 \in [-1, 3]$, то левая часть неравенства (21) определена на $[-1; 2{,}75)$ и $(2{,}75; 3]$, и функция

$$y = \frac{2\sqrt{x+1}}{1-2\sqrt{3-x}} - 1 \tag{22}$$

определена и непрерывна на $[-1; 2{,}75)$ и $(2{,}75; 3]$.

Найдем нули функции (22):

$$\frac{2\sqrt{x+1}}{1-2\sqrt{3-x}} - 1 = 0,$$

$$2\sqrt{x+1} = 1 - 2\sqrt{3-x}. \tag{23}$$

После возведения в квадрат обеих частей уравнения (23) и приведения подобных членов имеем

$$4\sqrt{3-x} = 9 - 8x. \tag{24}$$

Возведя в квадрат обе части уравнения (24), получаем

$$16(3-x) = 81 - 144x + 64x^2,$$

откуда находим

$$x_1 = 1 + \frac{\sqrt{31}}{8} \approx 1{,}7; \quad x_2 = 1 - \frac{\sqrt{31}}{8} \approx 0{,}3.$$

Очевидно, $x_1 \in [-1; 2{,}75)$ и $x_2 \in [-1; 2{,}75)$. Теперь ясно, что функция (22) на $(2{,}75; 3]$ не меняет знака, и для решения неравенства (21) достаточно подставить в него одно из чисел этого полуинтервала. Возьмем для простоты вычислений $x = 3$. Легко

[1] Сущность этого метода описана на с. 58.

убедиться, что $x = 3$, а следовательно, и (2,75; 3] не является решением неравенства (21).

Числа x_1 и x_2 делят полуинтервал $[-1;\ 2{,}75)$ на три части:

$$[-1,\ x_2],\ [x_2,\ x_1] \text{ и } [x_1;\ 2{,}75). \qquad (25)$$

Напоминаем, что функция (22) на $[-1;\ 2{,}75]$ непрерывна. Поэтому для выяснения, какие из трех промежутков (25) являются решением неравенства (21), достаточно подставить в него одно из чисел промежутков (25). Возьмем для простоты вычислений $x = 0,\ 1,\ 2$ и убедимся, что они являются решением неравенства (21), а поэтому решением этого неравенства являются:

$$[-1;\ x_2);\ (x_2;\ x_1);\ (x_1;\ 2{,}75).$$

Упражнения

1. Построить графики уравнений $y = x^{0,5}$ и $y = 1 - (2 + x) : (2 - x)$. Определить по построенным графикам с точностью до единицы корни уравнения $(2 + x) : (2 - x) + x^{0,5} = 1$.

2. Не решая уравнения $(x + 8)^{0,25} = 2 + (x - 8)^{0,25}$, определить число его действительных корней и их знаки.

3. 1) Решить уравнение $(x^3 + x^2 - 1)^{0,5} + (x^3 + x^2 + 2)^{0,5} = 3$; 2) не решая уравнения $(x^3 + x^2 - 1)^{0,5} + (x^3 + x^2 + 2)^{0,5} = a$, определить множество значений a, при которых оно не имеет действительных корней.

4. Найти графическое решение уравнения $x^2 (2x + 15)^{-0,5} + (2x + 15)^{0,5} = 2x$.

5. Сколько решений имеет система уравнений

$$\left.\begin{aligned} &(x^2 + 5)^{0,5} + (y^2 - 5)^{0,5} = 15, \\ &x^2 + y^2 = 13? \end{aligned}\right\}$$

6. Решить неравенство $(8 - x)^{0,5} + (3 - x)^{0,5} \geqslant (26 + x)^{0,5}$.

7. 1) Построить график функции

$$y = \left(\frac{x^2 - 7x + 12}{x^2 - 2x - 3}\right)^{0,5};$$

2) указать множество значений a, при которых уравнение

$$\left(\frac{x^2 - 7x + 12}{x^2 - 2x - 3}\right)^{0,5} = a$$

имеет одно решение (ни одного решения).

8. Построить график уравнения $y = (5 - x - 6x^{-1})^{0,5}$.

9. 1) Построить графики уравнений $y = (-3x + x^2)^{0,5}$ и $y = 4 - x$; 2) решить уравнение $\sqrt{x^2 - 3x} = a - x$. При каких значениях a множество решений этого уравнения пустое? Состоит из двух элементов? Из одного элемента?

10. 1) Построить графики уравнений $y = (x^4 - 2x^2 + 1)^{0,5}$ и $y = 1 - x$; 2) записать множество решений неравенства $(x^4 - 2x^2 + 1)^{0,5} > 1 - x$.

11. Решить неравенство

$$\frac{x - 7}{(4x^2 - 19x + 12)^{0,5}} < 0.$$

12. 1) Построить график функции $y = (9 - x)^{0,5} - (4 - x)^{0,5}$ и доказать, что эта функция достигает своего наибольшего значения при $x = 4$; 2) при каких значениях a неравенство $(9 - x)^{0,5} - (4 - x)^{0,5} < a$ верно при всех $x < 4$?

13. 1) Построить график функции $y = 0,5\,(a - 4x^2)^{0,5}$ при некоторых значениях параметра a; 2) при каких значениях a уравнение $x - 1 = 0,5\,(a - 4x^2)^{0,5}$ имеет один корень?

14. Из выражений $(2 + x - x^2)^{0,5}$ и $x - 4$ составить неравенство, решением которого (наряду с другими) является число 0,5.

15. Решить уравнение $\sqrt{x + a} = a - \sqrt{x}$.

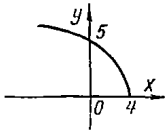


Рис. 43

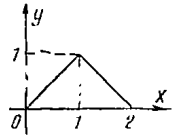


Рис. 44

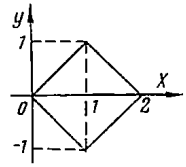


Рис. 45

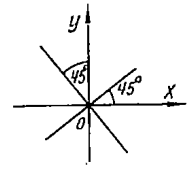


Рис. 46

16. 1) Построить графики уравнений $y = \sqrt{x^2 - x}$ и $y = a - x$; 2) решить относительно x уравнение $x + \sqrt{x^2 - x} = a$.

17. 1) Построить графики функций $y = 1 - x$ и $y = \sqrt{x\,(2a - x)}$ при $a > 0$; 2) решить уравнение $\sqrt{x\,(2a - x)} = 1 - x$.

18. Решить уравнение $\sqrt{a + x} \cdot a^{-1} + \sqrt{a + x} \cdot x^{-1} = x^{0,5}$.

19. Дан график (рис. 43) функции вида

$$y = (a - x)^{0,5} + (b - cx)^{0,5}.$$

Найти a, b, c.

20. 1) Почему уравнение $(2x - 6)^{0,5} + (x + 4)^{0,5} = 5$ может иметь не больше одного корня? 2) при каком значении a уравнение $(2x - 6)^{0,5} + (x + 4)^{0,5} = 5a$ не имеет ни одного решения?

21. Решить неравенство $(5x + 7)^{0,5} - (3x + 1)^{0,5} > (x + 3)^{0,5}$.

22. 1) Найти наибольшее значение функции

$$y = \sqrt{\frac{2x + 1}{x - 1}} + \sqrt{\frac{x - 1}{2x + 1}};$$

2) сколько действительных решений имеет уравнение $2 = \sqrt{\frac{2x + 1}{x - 1}} + \sqrt{\frac{x - 1}{2x + 1}}$?

23. Решить неравенство $\sqrt{(x - 3)\,(2 - x)} < 3 + 2x$.

24. Решить неравенство $(1 - x)^{0,5} + (1 - x)^{-0,5} \geqslant 2$.

25. 1) Построить графики функций $y = (1 - 8x^2)^{0,5}$ и $y = 1 - 2ax$; 2) решить уравнение $1 - (1 - 8x^2)^{0,5} = 2ax$ и определить число его действительных корней в зависимости от значения a.

26. Решить уравнение $(x^2 - 1)\,(13 - x^2)^{-0,5} = a\,(x - 1)$ и указать число его действительных решений в зависимости от значения a.

27. Решить неравенство $2x\,(2x + 9)^{-0,5} < (1 + 2x)^{0,5} - 1$.

28. Решить систему уравнений

$$\left.\begin{aligned}(x-y)^{\frac{1}{3}} &= (x-y)^{0,5},\\ (x+y)^{\frac{1}{3}} &= (x+y-4)^{0,5}.\end{aligned}\right\}$$

29. При каких значениях a неравенство $(7x-13)^{0,5}-(3x-19)^{0,5}<a+(5x-27)^{0,5}$ верно при любом значении x из области существования корней входящих в это неравенство?

30. Решить систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned}\sqrt{x+y}+\sqrt{2x+4y} &= \sqrt{2}+4,\\ \sqrt{x+2y}-\sqrt{2x+2y} &= 2^{1,5}-2.\end{aligned}\right\}$$

31. При каких значениях a уравнение $a(x+1)^{0,5}-1=(x-\sqrt{x+8})^{0,5}$ имеет наибольшее число решений?

32. 1) Построить графики уравнений

$$y_1=\sqrt{x-|x|},\quad y_2=\sqrt{1-x-|1-x|},\quad y=y_1+y_2;$$

2) построить график функции $y=1-|1-x|$; 3) даны графики некоторых уравнений (рис. 44 и 45), определенных на $[0,2]$. Написать эти уравнения; 4) дан график некоторого уравнения (рис. 46), определенного на $(-\infty,+\infty)$. Написать это уравнение.

33. 1) Построить графики функций $y=\sqrt{x^2+x}$ и $y=a-x$ (при некоторых значениях a); 2) решить неравенство $\sqrt{x^2+x}<a-x$.

34. 1) Построить графики функций $y=0,5(x+1)$ и $y=(x+a)^{0,5}$ при некоторых значениях параметра a; 2) решить неравенство $2(x+a)^{0,5}>x+1$.

35. 1) Построить графики функций $y=(x-1)^{0,5}$ и $y=x^{0,5}-a$ при некоторых значениях параметра a; 2) решить неравенство $x^{0,5}-(x-1^{0,5})>a$.

36. Построить графики функций $y_1=\sqrt{a^2-x^2}$, $y_2=\sqrt{2ax-x^2}$, $y_3=y_1+y_2$ при некотором значении параметра a. Доказать, если $a\neq 0$, то $y_3\geqslant b$ на $[0,\ a]$.

37. Решить систему уравнений

$$\left.\begin{aligned}\sqrt{x+\sqrt{y}}-\sqrt{x-\sqrt{y}} &= 1,\\ \sqrt{x^2-y}+\sqrt{x^2+y} &= 1.\end{aligned}\right\}$$

38. Решить систему уравнений

$$\left.\begin{aligned}\frac{x^2}{y^2}+2\sqrt{x^2+1}+y^2 &= 3,\\ x+\frac{y}{\sqrt{x^2+1}+x}+y^2 &= 0.\end{aligned}\right\}$$

§ 6. Показательные и логарифмические уравнения и неравенства

Общие сведения

Уравнения, в которых неизвестное содержится в показателе степени, называются показательными.

Логарифмическое уравнение содержит неизвестное под знаком логарифма.

Решение простейшего показательного уравнения $a^x = b$ основано на следующем свойстве степеней:

если степени двух чисел при одном и том же основании a ($a > 0$, $a \neq 1$) равны, то равны и сами числа.

Решение простейшего логарифмического уравнения $\log_a x = b$ основано на таком свойстве логарифма:

если логарифмы двух положительных чисел по одному и тому же основанию a ($a > 0$, $a \neq 1$) равны, то равны и сами эти числа.

Все логарифмические и показательные уравнения сводятся к простейшим путем применения свойств логарифмических и показательных функций.

Пример 1. Решить уравнение

$$\log_2 (x-1) + \log_2 (x-2) = \log_2 (x+2). \qquad (1)$$

Данное уравнение определено на множестве чисел: $(1, +\infty) \cap (2, +\infty) \cap (-2, +\infty)$, т. е. на множестве $(2, +\infty)$.

Преобразовав левую часть уравнения, имеем

$$\log_2 [(x-1)(x-2)] = \log_2 (x+2). \qquad (2)$$

Уравнение (2) эквивалентно уравнению

$$(x-1)(x-2) = x+2,$$

если $2 < x < +\infty$, отсюда найдем

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 4.$$

Так как только второй корень принадлежит $(2, +\infty)$, то выбираем $x = 4$.

Пример 2. Решить уравнение

$$9^{x(x-1)-0,5} = \sqrt{3}. \qquad (3)$$

Представив обе части уравнения в виде степеней числа 3, получаем

$$3^{2[x(x-1)-0,5]} = 3^{0,5}.$$

Отсюда

$$2[x(x-1) - 0,5] = 0,5.$$

Решив последнее уравнение, находим корни уравнения (3):

$$x_1 = -0{,}5 \text{ и } x_2 = 1{,}5.$$

Ниже на конкретных примерах рассмотрена сущность отдельных способов решения логарифмических и показательных уравнений и неравенств.

Сведение логарифмического уравнения к целому или рациональному

Логарифмическое уравнение вида

$$\log_a^n x + m_1 \log_a^{n-1} x + m_2 \log_a^{n-2} x + \ldots + m_{n-1} \log_a x + m_n = 0$$

(n — натуральное число, $0 < a < 1$ или $a > 1$) путем замены $\log_a x = t$ сводится к целому уравнению относительно t.

Пример 3. Решить уравнение

$$\lg^3 x - \lg^2 x - 6 \lg x = 0. \tag{4}$$

Это уравнение определено на $(0, +\infty)$.

Обозначим $\lg x = y$. Получим кубическое уравнение

$$y^3 - y^2 - 6y = 0.$$

Его корни $y_1 = 0$, $y_2 = -2$, $y_3 = 3$. Следовательно, уравнение (4) свелось к решению трех простейших уравнений:

$$\lg x = 0, \ \lg x = -2, \ \lg x = 3,$$

Решив эти уравнения, получаем корни уравнения (4):

$$x_1 = 1, \ x_2 = 0{,}01, \ x_3 = 1000.$$

К рациональным сводятся и показательно-логарифмические уравнения. Для этого предварительно логарифмируются обе части такого уравнения.

Пример 4. Решить уравнение

$$3^8 = x^{2+\log_3 x}. \tag{5}$$

Правая часть уравнения определена при $x > 0$ ($x \neq 1$).

Прологарифмируем по основанию 3 обе части данного уравнения:

$$8 = (2 + \log_3 x) \log_3 x.$$

Обозначим $\log_3 x = y$. Имеем $8 = (2 + y)\, y$. Корни этого уравнения $y_1 = -4$, $y_2 = 2$. Таким образом, уравнение (5) свелось к решению двух простейших логарифмических уравнений:

$\log_3 x = -4$, $\log_3 x = 2$.

Решив их, получаем ответ: $x_1 = 1/81$, $x_2 = 9$.

Переход к новому основанию логарифмов

Пусть дано уравнение $\log_{f(x)}F(x) - \log_{m(x)}M(x) = 0$ $(F(x) > 0;$ $M(x) > 0;$ $0 < f(x_0) < 1$ или $f(x_0) > 1;$ $0 < m(x_0) < 1$ или $m(x_0) > 1,$ где x_0 — корень уравнения).

Используя формулу перехода от логарифма одного основания к логарифму с другим основанием: $\log_a M = \log_b M : \log_b a$, перейдем к основанию $p(x)$ $(0 < p(x) < 1$ или $p(x) > 1)$:

$$\log_{p(x)}F(x) : \log_{p(x)}f(x) - \log_{p(x)}M(x) : \log_{p(x)}m(x) = 0.$$

Если учесть требования к $f(x)$, $m(x)$ и $p(x)$, то полученное уравнение эквивалентно исходному.

Пример 5. Решить уравнение

$$\log_{0,5x} x^2 - 14\log_{16x} x^3 + 40\log_{4x}\sqrt{x} = 0. \qquad (6)$$

Уравнение определено на множестве положительных чисел, кроме тех, которые являются корнями уравнений: $0,5x = 1$, $16x = 1$, $4x = 1$ (основание логарифма отлично от 1), т. е. $x \neq 2$, $x \neq 1/16$, $x \neq 1/4$.

Воспользуемся формулой перехода от логарифма одного основания к логарифму с другим основанием:

$$\log_a M = \frac{\log_b M}{\log_b a}.$$

Возьмем x в качестве нового основания логарифмов. Тогда получим

$$\frac{\log_x x^2}{\log_x 0,5x} - \frac{14\log_x x^3}{\log_x 16x} + \frac{40\log_x\sqrt{x}}{\log_x 4x} = 0. \qquad (7)$$

Обратим внимание на следующий факт. Хотя уравнение (6) определено при $x = 1$, и, более того, подстановка показывает, что $x = 1$ является корнем уравнения (6), уравнение (7) при $x = 1$ не определено. Таким образом, будем решать уравнение (7), считая, что

$$x \neq 1,\ x \neq 2,\ x \neq 1/16,\ x \neq 1/4. \qquad (8)$$

$$\frac{2}{\log_x 0,5 + 1} - \frac{14\cdot 3}{\log_x 16 + 1} - \frac{40\cdot 0,5}{\log_x 4 + 1} = 0. \qquad (9)$$

Обозначим $\log_x 0,5 = y$. Тогда

$$\log_x 16 = \log_x (0,5)^{-4} = -4,\ \log_x 0,5 = -4y;$$

$$\log_x 4 = \log_x (0,5)^{-2} = -2\log_x 0,5 = -2y$$

и уравнение (9) принимает вид

$$\frac{2}{y+1} - \frac{42}{-4y+1} + \frac{20}{-2y+1} = 0.$$

В результате тождественных преобразований последнее уравнение приводится к квадратному:

$$2y^2 - 3y - 2 = 0.$$

Его корни $y_1 = -0{,}5$; $y_2 = 2$.

Таким образом, получаем два простейших логарифмических уравнения:

$$\log_x 0{,}5 = -0{,}5; \quad \log_x 0{,}5 = 2.$$

Решив их, получаем $x_1 = 4$, $x_2 = 0{,}5\sqrt{2}$.

Числа 4 и $0{,}5\sqrt{2}$ не входят в множество чисел (8), поэтому x_1 и x_2 являются корнями уравнения (6). Окончательный ответ $x_1 = 4$; $x_2 = 0{,}5\sqrt{2}$; $x_3 = 1$.

Функциональный подход

При решении уравнений и неравенств этим методом используются свойства непрерывных монотонных функций, рассмотренные на с. 14 — 16.

Пример 6. Решить уравнение

$$3 \cdot 16^x + 36^x = 2 \cdot 81^x. \tag{10}$$

Разделим обе части уравнения на 81^x:

$$3\left(\frac{16}{81}\right)^x + \left(\frac{36}{81}\right)^x = 2. \tag{11}$$

Рассмотрим функции $y_1 = 3\left(\frac{16}{81}\right)^x$; $y_2 = \left(\frac{36}{81}\right)^x$; $y = y_1 + y_2 - 2$.

Функции y_1 и y_2 определены на $(-\infty, +\infty)$. Они монотонно убывающие, так как 16 : 81 и 36 : 81 меньше единицы. Поэтому функция y монотонно убывающая от $+\infty$ до -2. Отсюда ясно, что уравнение (11) имеет единственное решение.

При $x < 0$ $y_1 \geqslant 3$, а $y_2 \geqslant 1$. Поэтому на $(-\infty, 0)$ уравнение (11) решения не имеет. При $x = 1$ $y < 0$; при $x = 0$ $y > 0$. Поэтому корень уравнения (10) принадлежит интервалу (0,1). Нетрудно заметить, что $y = 0$ при $x = 0{,}5$, следовательно, ответ: $x = 0{,}5$.

Пример 7. Решить неравенство

$$\log_2\left(\frac{2}{x^4 + 1}\right) \geqslant x^2 + 1.$$

Функция $y = \frac{2}{x^4 + 1}$ определена на $(-\infty, +\infty)$. Она достигает наибольшего значения в точке $x = 0$. Поэтому

$$\log_2\left(\frac{2}{x^4+1}\right)\leqslant 1$$

при всех $x\in(-\infty,\ +\infty)$.

Функция $y=x^2+1$ определена на $(-\infty,\ +\infty)$ и в точке $x=0$ достигает наименьшего значения, равного 1. Поэтому решением исходного неравенства является только $x=1$.

Графический метод

Сущность этого метода описана на с. 59.

Пример 8. Решить неравенство

$$\log_{0,5}(x^2-2x+a)>-3. \tag{12}$$

Очевидно, это неравенство эквивалентно системе неравенств

$$0<x^2-2x+a<8.$$

Отсюда

$$-x^2+2x<a<-x^2+2x+8.$$

Построим графики квадратичных функций:
$a=-x^2+2x$ и $a=-x^2+2x+8$ (рис. 47).

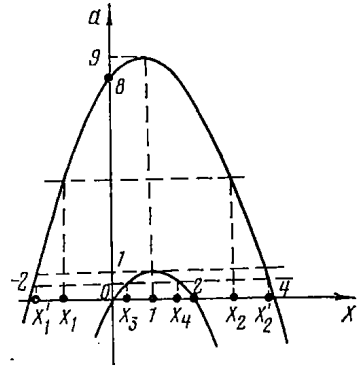


Рис. 47

Из графиков видно, что:

1) если $a\geqslant 9$, то решений неравенство (12) не имеет;

2) если $1<a<9$, то $x_1<x<x_2$, где x_1 и x_2 — корни уравнения $a=-x^2+2x+8$;

3) если $a\leqslant 1$, то $x_1'<x<x_3$ или $x_4<x<x_2'$, где x_1' и x_2' — корни уравнения

$$a=-x^2+2x+8, \tag{13}$$

а x_3 и x_4 — корни уравнения

$$a=-x^2+2x. \tag{14}$$

Теперь остается только вычислить корни уравнений (13) и (14):

$$x_1'=x_1=1-\sqrt{9-a},\ x_2'=x_2=1+\sqrt{9-a},$$
$$x_3=1-\sqrt{1-a},\ x_4=1+\sqrt{1-a}.$$

Упражнения

1. 1) Построить графики функций $y_1 = 3^x$, $y_2 = 4^x$, $y_3 = 5^x$, $y_4 = 3^x + 4^x$. Почему графики y_3 и y_4 пересекаются только в одной точке? 2) найти при помощи построенных графиков приближенные значения корней уравнений $3^x + 4^x = 2^x$, $3^x + 4^x = 5^x$; 3) определить множество решений неравенства $2 < 3^x + 4^x < 25$.

2. Решить уравнение $x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x^x}$.

3. 1) Построить графики уравнений $y = 3^{x+1}$, $y = 9^x$, $y = 3^{x+1} - 2$, $y = 3^{x+1} - 9^x$; 2) сколько решений имеет уравнение $3^{x+1} - 2 = 9^x$? 3) указать множество значений a, при которых уравнение $3^{x+1} - a = 9^x$ имеет решение.

4. Построить график функции

$$y = -\log_2(-x).$$

5. 1) Построить графики уравнений $y = 0{,}5^x$ и $y = 0{,}5^{-1-x}$; 2) решить уравнение $0{,}5^x - 0{,}5^{-1-x} = 0$; 3) построить график функции $y = 0{,}5^{-1-x} + 1$; 4) решить неравенство $0{,}5^x - 0{,}5^{-1-x} \geqslant 1$.

6. Решить систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} x^{2y-1} &= 5, \\ x^{y+2} &= 3. \end{aligned}\right\}$$

7. 1) Построить график функции $y = x^2 - 2x + a$ при некоторых значениях параметра a; 2) решить неравенство $\log_{0,5}(x^2 - 2x + a) \geqslant -3$.

8. 1) Построить графики уравнений $y = x + 1$, $y = (x+3)^{0,5}$; 2) найти область определения функций $y = (x+3)^{0,5} - x - 1$, $y = \log_3(\sqrt{x+3} - x - 1)$; 3) определить множество решений неравенства $\log_2(\sqrt{x+3} - x - 1) \leqslant 0$.

9. 1) Построить график уравнения $y = x^2 + x + 1$; 2) найти область определения функции $y = (x^2 + x + 1)^x$; 3) на каком из четырех множеств $(-\infty, -1)$, $(-1; 0{,}5]$, $[-0{,}5; 0)$, $(0, +\infty)$ верно неравенство $(x^2 + x + 1)^x < 1$?

10. Найти область определения функции $y = \log_{|0-x^2|} \operatorname{tg} x$.

11. 1) Построить графики уравнений $y = x$, $y = (2x-1) : (x-1)$; 2) найти область определения функции $y = \log_x\left(\frac{2x-1}{x-1}\right)$; 3) решить уравнение $\log_x\left(\frac{2x-1}{x-1}\right) = 1$; 4) определить множество решений неравенства $\log_x\left(\frac{2x-1}{x-1}\right) > 1$.

12. 1) Построить графики уравнений $y = \log_{0,5} x$, $y = \frac{1}{\log_{0,5} x}$; 2) решить неравенство $1 : \log_{0,5} x > 1$; 3) решить неравенство $1 : \log_a x > 1$, если $0 < a < 1$.

13. 1) Построить графики функций $y = \log_a x$, $y = x^{\log_a x}$, если $a > 1$; 2) найти множество значений x, удовлетворяющих условиям $x^{\log_a x} < a$ и $a > 1$.

14. Решить систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} |x|^{\lg|y|} &= 4, \\ xy &= 40. \end{aligned}\right\}$$

15. 1) Построить графики уравнений: $y_1 = x + 3x^{-1}$, $y_2 = x - 3x^{-1}$, $y_3 = \log_2 (x + 3x^{-1})$, $y_4 = \log_2 (x - 3x^{-1})$, $y_5 = |\log_2 (x + 3x^{-1})|$, $y_6 = |\log_2 (x - 3x^{-1})|$; 2) решить уравнение

$$|\log_2 (x + 3x^{-1})| + |\log_2 (x - 3x^{-1})| = \log_2 \frac{728}{9}.$$

16. Определить число действительных корней уравнения $8 - x \cdot 2^x + 2^{3-x} - x = 0$.

17. Решить неравенство $3^{\log_{0.5}(x^2-5x+7)} < 1$.

18. Решить неравенство $\log_2 (4^x + 4) - \log_2 (2^{x+1} - 3) > x$.

19. 1) Построить графики функций $y = 2 + x$, $y = x^2$; 2) найти область определения функции $y = \log_{x^2} (2 + x)$; 3) определить корни уравнения $x^2 = 2 + x$; 4) на каком из множеств $(-2, -1)$, $(-1, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 2)$, $(2, +\infty)$ верно неравенство $\log_{x^2} (2 + x) < 1$?

20. 1) Построить графики функций $y_1 = 3^{x+0,5} + 3^{x-0,5}$ и $y_2 = 4^{x+0,5} - 2^{2x-1}$; 2) на основе построенных графиков определить число решений уравнения $y_1 = y_2$; 3) решить уравнение $y_1 = y_2$; 4) решить неравенство $y_1 > y_2$.

21. Найти множество значений a, при которых уравнение $\log_x (x - a) = 2$ имеет действительные решения.

22. Решить неравенство $x^{(\lg x)^2 - 3\lg x + 1} > 1000$.

23. Решить неравенство $\log_x 2 \cdot \log_{2x} 2 > \log^2_{4x} 2$.

24. Решить уравнение

$$\frac{\log_x (2a - x)}{\log_x 2} + \frac{\log_a x}{\log_a 2} = \frac{1}{\log_{a^2-1} 2}.$$

25. 1) Построить графики функций $y_1 = x - a$ и $y_2 = \log_x (x - a)$ при некоторых (одних и тех же для y_1 и y_2) значениях параметра a; 2) решить неравенство $\log_x (x - a) > 2$.

26. 1) Построить график функции $y = a + 2x - x^2$ при некоторых положительных значениях параметра a; 2) решить неравенство $\log_{\sqrt{2a}} (a + 2x - x^2) < 2$.

27. Решить системы уравнений:

1) $\begin{cases} \sqrt[x]{x + 7y} = 3, \\ (2x + 14y)\, 2^x = 72; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^z = y^{\frac{8}{3}}, \\ y^z = x^{\frac{2}{3}}, \\ 2\sqrt[4]{x} + 2\sqrt[4]{y} = 9z; \end{cases}$

3) $\begin{cases} y^{x^2-3x-4} = 1, \\ \log_2 x = y; \end{cases}$

4) $\begin{cases} \log_2 x + \log_4 \dfrac{1}{y} = 3, \\ x^2 + 16y^2 = 17; \end{cases}$

5) $\begin{cases} \log_2 (y - x) = \log_8 (3y - 5x), \\ x^2 + y^2 = 5; \end{cases}$

6) $\begin{cases} (ax)^{\lg a} = (by)^{\lg b}, \\ b^{\lg (ax)} = a^{\lg (by)} \end{cases}$ $(a, b > 0;\ a \neq 1,\ b \neq 1)$.

§ 7. Тригонометрические уравнения и неравенства

Общие сведения

Тригонометрические уравнения — это уравнения, алгебраические относительно тригонометрических функций от переменного kx. При помощи тождественных преобразований тригонометрические уравнения сводятся к виду

$$a_0y^n + a_1y^{n-1} + \ldots + a_n = 0, \qquad (1)$$

где y — одна из шести тригонометрических функций $\sin kx$, $\cos kx$, $\operatorname{tg} kx$, $\operatorname{ctg} kx$, $\sec kx$, $\operatorname{cosec} kx$.

Решение всякого тригонометрического уравнения сводится к определению корней уравнения вида

$$\sin kx = m, \quad \cos kx = m, \quad \operatorname{tg} kx = m.$$

Способы решения тригонометрических уравнений:

1) преобразование данного уравнения к виду (1);

2) сведение к виду $f_1(k_1x)\, f_2(k_2x) = 0$, где f_1 и f_2 — тригонометрические функции;

3) понижение степени тригонометрической функции с помощью формул сложения и их следствий;

4) преобразование суммы тригонометрических функций в произведение (и наоборот);

5) введение функций вспомогательного угла $\operatorname{tg}\varphi$;

6) функциональный подход;

7) графический способ.

Поясним сущность каждого из названных способов решением примеров.

Преобразование тригонометрического уравнения к виду

$$a_0y^n + a_1y^{n-1} + \ldots + a_n = 0$$

Сущность этого метода раскрывается в процессе решения следующего примера.

Пример 1. Решить уравнение

$$4\sin 2x + 3\cos 2x = 5. \qquad (2)$$

Преобразуем его к виду

$$4\sin 2x = 5 - 3\cos 2x. \qquad (3)$$

После возведения обеих частей уравнения в квадрат имеем:

$$16\sin^2 2x = 25 - 30\cos 2x + 9\cos^2 2x$$

или

$$16\,(1-\cos^2 2x)=25-30\cos 2x+9\cos^2 2x.$$

Обозначив $\cos 2x=y$, получаем

$$16\,(1-y^2)=25-30y+9y^2.$$

Решив это уравнение, найдем $y_1=0{,}6$ и $y_2=0{,}6$.

Итак, $\cos 2x=0{,}6$. Отсюда

$$2x=\pm\arccos\ 0{,}6+2k\pi\ (k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots)$$

и

$$x=\pm 0{,}5\arccos 0{,}6+k\pi.$$

Но такое решение нуждается в проверке, так как при возведении в квадрат могли появиться посторонние корни. В самом деле, правая часть уравнения (3) при всех значениях x положительная, потому что $\cos x\leqslant 1$. Левая же часть этого уравнения может быть и положительной, и отрицательной. Так как $\arccos 0{,}6$ — угол острый, то $\sin(2\arccos 0{,}6)$ — положительное число, а $\sin(-2\arccos 0{,}6)$ — отрицательное. Поэтому решением уравнения (2) будет только

$$x=0{,}5\arccos\ 0{,}6+k\pi\ \ (k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots).$$

Сведение тригонометрического уравнения к виду

$$f_1(k_1x)\,f_2(k_2x)=0$$

При помощи тождественных преобразований тригонометрическое уравнение $f(kx)=0$ приводится к виду

$$f_1(k_1x)\ f_2(k_2x)=0.$$

Если тригонометрические функции $f_1(k_1x)$ и $f_2(k_2x)$ определены на множестве M, то на этом множестве данное уравнение равносильно дизъюнкции уравнений $f_1(k_1x)=0$, $f_2(k_2x)=0$.

Пример 2. Решить уравнение

$$1+\operatorname{tg}x=(1-\operatorname{tg}x)\ (1+\sin 2x). \tag{4}$$

Левая и правая части уравнения определены на всем множестве действительных чисел, за исключением тех, при которых не определен $\operatorname{tg}x$, т. е. $x\neq 0{,}5\pi+k\pi$ $(k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots)$.

Очевидно,

$$1+\sin 2x=(\sin x+\cos x)^2,$$

$$1+\operatorname{tg}x=1+\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{\cos x+\sin x}{\cos x}.$$

Теперь уравнение (4) принимает вид

$$\frac{\sin x + \cos x}{\cos x} = (1 - \operatorname{tg} x)\ (\sin x + \cos x)^2,\ \cos x \neq 0$$

или

$$\sin x + \cos x = (\cos x - \sin x)\ (\sin x + \cos x)^2.$$

Отсюда

$$(\cos x - \sin x)\ (\sin x + \cos x)^2 - (\sin x + \cos x) = 0$$

и

$$(\sin x + \cos x)\ [(\cos x - \sin x)\ (\sin x + \cos x) - 1] = 0$$

или

$$(\sin x + \cos x)\ (\cos^2 x - \sin^2 x - 1) = 0,$$

$$(\sin x + \cos x)\ (\cos 2x - 1) = 0. \tag{5}$$

Уравнение (5) распадается на два уравнения

$$\sin x + \cos x = 0,\ \cos 2x - 1 = 0,$$

которые сводятся к простейшим:

$$\operatorname{tg} x = -1, \tag{6}$$

$$\cos 2x = 1. \tag{7}$$

Решения уравнения (6)

$$x_1 = -0{,}25\pi + m\pi\ (m = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots).$$

Решения уравнения (7)

$$x_2 = \pi n\ (n = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots).$$

При всех значениях x из этих серий $\operatorname{tg} x$ определен. Поэтому полученные формулы и дают решения уравнения (4).

Понижение степени тригонометрических функций

Понижение степени тригонометрических функций производится при помощи следующих формул: $2\cos^2\alpha = 1 + \cos 2\alpha$; $2\sin^2\alpha = 1 - \cos 2\alpha$; $2\sin\alpha\cos\alpha = \sin 2\alpha$; $\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos 2\alpha$; $3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha = \sin 3\alpha$; $4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha = \cos 3\alpha$; $8\cos^4\alpha - 8\cos^2\alpha + 1 = \cos 4\alpha$; $8\cos^3\alpha\sin\alpha - 4\cos\alpha\sin\alpha = \sin 4\alpha$.

Пример 3. Решить уравнение

$$\cos^6 x + \sin^6 x = 4\sin^2 2x. \tag{8}$$

Применив формулы

$$\frac{1+\cos 2x}{2}=\cos^2 x, \tag{9}$$

$$\frac{1-\cos 2x}{2}=\sin^2 x, \tag{10}$$

получаем

$$\cos^6 x=(\cos^2 x)^3=\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^3,$$

$$\sin^6 x=(\sin^2 x)^3=\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^3.$$

В результате понятных преобразований найдем

$$\cos^6 x+\sin^6 x=\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^3+\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^3=$$
$$=0{,}25\,(1+3\cos^2 2x).$$

Применим еще раз формулу (9):

$$0{,}25\,(1+3\cos^2 2x)=0{,}25\left(1+\frac{3\,(1+\cos 4x)}{2}\right)=$$
$$=0{,}125\,(5+3\cos 4x).$$

По формуле (10)

$$4\sin^2 2x=2\,(1-\cos 4x).$$

Таким образом, уравнение (8) в результате понижения степени тригонометрических функций приведено к виду

$$0{,}125\,(5+3\cos 4x)=2\,(1-\cos 4x).$$

Отсюда $\cos 4x=\frac{11}{19}$; $4x=\pm\arccos\frac{11}{19}+2\pi k$, $x=$

$=\pm 0{,}25\arccos\frac{11}{19}+0{,}5\pi k$ $(k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots)$.

Преобразование суммы тригонометрических функций в произведение

Преобразование суммы тригонометрических функций в произведение и обратное преобразование выполняются при помощи формул:

1. $\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$;

2. $\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$;

3. $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$;

4. $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$;

5. $\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$;

6. $\operatorname{ctg}\alpha \pm \operatorname{ctg}\beta = \pm\frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\sin\alpha\sin\beta}$;

7. $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta = \frac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\sin\beta}$;

8. $\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{tg}\beta = \frac{\cos(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\cos\beta}$;

9. $\sin\alpha\sin\beta = 0{,}5\,[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)]$;

10. $\cos\alpha\cos\beta = 0{,}5\,[\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)]$;

11. $\sin\alpha\cos\beta = 0{,}5\,[\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)]$.

Пример 4. Решить уравнение

$$\sin x + \sin 2x + 2\sin x\sin 2x = 2\cos x + \cos 2x. \qquad (11)$$

Приведем уравнение (11) к виду

$$(\sin x + \sin 2x) - (\cos x + \cos 3x) - \cos 2x = 0.$$

Применив формулу 3, получаем

$$(\sin x + \sin 2x) - 2\cos 2x\cos x - \cos 2x = 0.$$

Отсюда

$$(\sin x + \sin 2x) - \cos 2x\,(2\cos x + 1) = 0$$

или

$$\sin x\,(1 + 2\cos x) - \cos 2x\,(2\cos x + 1) = 0$$

и

$$(1 + 2\cos x)\,(\sin x - \cos 2x) = 0.$$

Теперь уравнение (11) распадается на два:

$$1 + 2\cos x = 0, \qquad (12)$$

$$\sin x - \cos 2x = 0. \qquad (13)$$

Решения уравнения (12):

$$x_1 = \pm\frac{2}{3}\pi + 2k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Уравнение (13) преобразуем следующим образом:

$$\sin x = \cos 2x,\ \cos(0{,}5\pi - x) = \cos 2x.$$

Отсюда $0{,}5\pi - x = \pm 2x + 2n\pi$.

Значит,

$$3x_2 = 0{,}5\pi - 2\pi n,\ x_2 = \frac{\pi}{6} - \frac{2}{3}\pi n,$$

$$x_3 = -0{,}5\pi + 2\pi n\ (n = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots).$$

Введение функций вспомогательного угла $\operatorname{tg}\varphi$

Пример 5. Решить уравнение

$$a\sin x + b\cos x = c,\ a \neq 0,\ b \neq 0. \tag{14}$$

Определяем угол φ из условий

$$\sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}},\ \cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Это можно сделать, так как $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$.

Разделив левую и правую части уравнения (14) на $\sqrt{a^2 + b^2}$, получим

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

и

$$\sin(\varphi + x) = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Отсюда

$$\varphi + x = (-1)^n \arcsin\frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \pi k$$

и

$$x = -\varphi + (-1)^n \arcsin\frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \pi k,$$

где $k = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots$.

Очевидно, решение уравнения существует только в том случае, если $\left|\frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right| \leqslant 1$.

Функциональный подход

При решении уравнений и неравенств этим методом используются свойства непрерывных монотонных функций, рассмотренные в § 1 гл. 2.

Пример 6. Найти все решения неравенства

$$\sqrt{3\cos 2x} > \sqrt{2}\cos x,$$

удовлетворяющие условию $|x| < \pi$.

Рассмотрим функции

$$y_1 = \sqrt{3\cos 2x},\ y_2 = \sqrt{2}\cos x.$$

Согласно условию задачи функция y_2 определена на $(-\pi, \pi)$. Функция y_1 определена на той части интервала $(-\pi, \pi)$, где $\cos 2x \geqslant 0$, т. е. на $[-0{,}25\pi;\ 0{,}25\pi]$.

Следовательно, данные функции определены на сегменте $[-0{,}25\pi;\ 0{,}25\pi]$.

На $[-0{,}25\pi;\ 0]$ функция y_1 монотонно возрастает от 0 до $\sqrt{3}$, функция y_2 на этом сегменте монотонно возрастает от 1 до $\sqrt{2}$. Следовательно, на $[-0{,}25\pi;\ 0]$ есть одна точка, в которой $y_1 = y_2$. Нетрудно заметить, что $y_1\left(-\frac{\pi}{6}\right) = y_2\left(-\frac{\pi}{6}\right)$.

В силу четности функций y_1 и y_2, $y_1\left(\frac{\pi}{6}\right) = y_2\left(\frac{\pi}{6}\right)$.

Теперь ясно, что решением данного неравенства является интервал $\left(-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right)$.

Пример 7. Решить уравнение

$$\sin[0{,}2\arccos x] = 1.$$

Функция $y = \arccos x$ монотонно изменяется от 0 до π. Функция $y = 0{,}2\arccos x$ изменяется от 0 до $0{,}2\pi$. Поэтому функция $y = \sin(0{,}2\arccos x)$ изменяется от 0 до $\sin\frac{\pi}{5} < 1$. Отсюда ясно, что данное уравнение решений не имеет.

Графический метод

Пример 8. Решить уравнение

$$\sin^2\frac{x}{2}\cos x = a.$$

Преобразуем данное уравнение к виду

$$a = 0{,}5(\cos x - \cos^2 x)$$

и обозначим $\cos x = z$, $-1 \leqslant z \leqslant 1$.

Построим графики функций

$$y_1 = -0{,}5z^2 + 0{,}5z,\ y_2 = a$$

(при некоторых значениях a).

Прочитав графики этих функций на отрезке $[-1, 1]$, получаем: 1) при $a = \frac{1}{8}$ данное уравнение имеет одно решение: $\cos x_1 = 0{,}5$; 2) при $0 < a < \frac{1}{8}$ имеем два решения: $\cos x_1 = m$ $(0 < m < 0{,}5)$ и $\cos x_2 = n$ $(0{,}5 < n < 1)$; 3) если $a = 0$, то имеем также два решения: $\cos x_1 = 0$ и $\cos x_2 = 1$; 4) если $-1 < a < 0$, то уравнение имеет одно решение: $\cos x_1 = k$ $(-1 < k < 0)$; 5) при $a = -1$ уравнение имеет одно решение: $\cos x_1 = -1$.

Пример 9. Решить относительно x неравенство

$$\cos x - \frac{1}{\cos x} \leqslant a,$$

если $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$.

Функция $y = \cos x - \frac{1}{\cos x}$, рассматриваемая на $[0, 2\pi]$, не определена в точках $x = 0{,}5\pi$ и $x = 1{,}5\pi$, потому что в этих точках $\cos x = 0$.

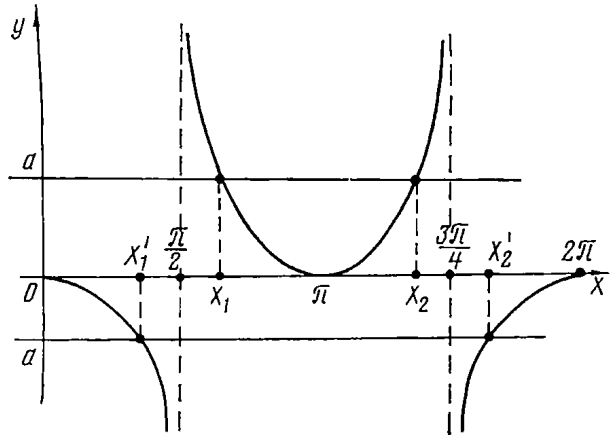


Рис. 48

На $[0; 0{,}5\pi)$ функция убывает от 0 до $-\infty$.

На $(0{,}5\pi; \pi)$ функция y убывает от $+\infty$ до 0.

На $[\pi; 1{,}5\pi)$ она возрастает от 0 до $+\infty$.

На $(1{,}5\pi; 2\pi]$ функция y возрастает от $-\infty$ до 0. График функции y показан на рис. 48.

Пусть x_1' и x_2' — корни уравнения

$$\cos x - \frac{1}{\cos x} = a \ (a < 0);$$

x_1 и x_2 — корни этого уравнения, если $a > 0$.

Из графика ясно, что если:

1) $a = 0$, то $0 \leqslant x < 0{,}5\pi$ или $1{,}5\pi < x \leqslant 2\pi$;

2) $a < 0$, то $x_1' \leqslant x < 0{,}5\pi$ или $1{,}5\pi < x \leqslant x_2'$;

3) $a > 0$, то $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$ или $0 \leqslant x < 0{,}5\pi$ или $1{,}5\pi < x \leqslant 2\pi$.

Для определения $x_1 (x_1')$ и $x_2 (x_2')$ решаем уравнение

$$\cos x - \frac{1}{\cos x} = a \ (\cos x \neq 0):$$

$\cos^2 x - 1 - a \cos x = 0$, $\cos x = 0{,}5\,(a - \sqrt{a^2 + 4})$, $\cos x \neq 0{,}5\,(a + \sqrt{a^2 + 4})$, так как при любом $a \neq 0$ $|0{,}5\,(a + \sqrt{a^2 + 4})| > 1$.

Отсюда

$$x_1 = \arccos 0{,}5\,(a - \sqrt{a^2 + 4}), \quad x_2 = 2\pi - \arccos 0{,}5\,(a - \sqrt{a^2 + 4}).$$

Упражнения

1. 1) Построить график функции $y = (\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{tg} \alpha) : (\cos 4\alpha + 1)$ на интервале $(0;\ 0{,}25\pi)$; 2) решить систему неравенств

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{tg} \alpha}{\cos 4\alpha + 1} < 4, \\ 0 < \alpha < 0{,}25\pi. \end{array}\right\}$$

2. Построить график функции $y = \dfrac{\cos 2\alpha + 1}{\operatorname{ctg} \dfrac{\alpha}{2} - \operatorname{tg} \dfrac{\alpha}{2}}$ на интервале $(0;\ 0{,}5\pi)$.

3. 1) Построить график функции $y = (\sin^6 x + \cos^6 x)^{-1}$ на интервале $(0;\ 0{,}5\pi)$; 2) установить, при каких значениях b уравнение $b\,(\sin^6 x + \cos^6 x) = 2$ имеет два решения.

4. Решить уравнение $\sin 3x + \sin 5x = \sin 4x$.

5. 1) Построить графики уравнений $y = \sin 2x - 4$, $y = 4 \cos 2x$ на интервале $(0;\ \pi)$ и по графикам определить число корней уравнения $\sin 2x - 4 \cos 2x = 4$ на $(0;\ \pi)$; 2) найти приближенные значения корней этого уравнения на $(0;\ \pi)$; 3) решить уравнение $\sin 2x - 4 \cos 2x = 4$ вычислением; 4) решить систему неравенств

$$\left.\begin{array}{l} \sin 2x - 4 \cos 2x > 4, \\ 0{,}25\pi < x < 0{,}75\pi. \end{array}\right\}$$

6. 1) Построить графики функций $y = \sin 2x - 3$, $y = -2 \operatorname{ctg} x$ на $(0;\ \pi)$. Построив графики, вы убедитесь, что уравнение

$$\sin 2x - 3 = -2 \operatorname{ctg} x$$

на $(0; \pi)$ имеет решение $x = 0{,}25\pi$; 2) доказать, что других решений на этом интервале данное уравнение не имеет; 3) записать все решения уравнения $\sin 2x + 2\operatorname{ctg} x = 3$.

7. 1) Построить графики функций $y = \operatorname{tg} 3x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = 2\sin 4x$; 2) на каком из промежутков

$$\left[0, \frac{\pi}{6}\right], \left[\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{6}\right], \left[\frac{2\pi}{6}, \frac{3\pi}{6}\right], \left[\frac{3\pi}{6}, \frac{4\pi}{6}\right], \left[\frac{4\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right], \left[\frac{5\pi}{6}, \pi\right]$$

уравнение $\operatorname{tg} 3x + \operatorname{tg} x = 2\sin 4x$ имеет решения?

8. 1) Построить графики функций $y_1 = \operatorname{ctg}^4 x$, $y_2 = \cos^3 2x + 1$ на промежутке $[0; \pi]$; 2) на основании построенных графиков записать все решения уравнения $\operatorname{ctg}^4 x = \cos^3 2x + 1$, не выполняя над этим уравнением никаких преобразований.

9. Решить уравнение $4\sin 2x \sin 5x \sin 7x - \sin 4x = 0$.

10. Решить уравнение $\operatorname{tg}(x + 1)\operatorname{ctg}(2x + 3) = 1$.

11. Решить неравенство $\cos 3x + \cos 2{,}5x < 2$.

12. 1) Построить графики уравнений $y = 3\operatorname{tg} x - 5$, $y = -2\sin 2x$ на $[0; \pi]$; 2) решить уравнение $2\sin 2x + 3\operatorname{tg} x - 5 = 0$.

13. 1) Построить графики функций $y_1 = (1 + \sin 2x)^{0,5} - (1 - \sin 2x)^{0,5}$, $y_2 = 1 + \cos x$ на $[0, 2\pi]$; 2) найти решения уравнения $(1 + \sin 2x)^{0,5} - (1 - \sin 2x)^{0,5} = 1 + \cos x$ на $[0, 2\pi]$.

14. Определить число действительных решений уравнения на $[0; \pi]$:

(1) $\sin^8 x + \cos^8 x = \operatorname{tg} x$; 2) $\dfrac{1}{\sin^4 x} + \dfrac{1}{\cos^4 x} = \sin x$.

15. Решить уравнение $\sin \pi\sqrt{t} + \sin \pi t = 0$.

16. 1) Построить графики функций $y_1 = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$, $y_2 = 3 + \cos 4x$ на $0; \pi)$; 2) решить неравенство $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x - \cos 4x > 3$, если $0 < x < \pi$.

17. Решить уравнение $\operatorname{ctg}^4 x = \cos^2 2x + 1$.

18. 1) Построить график функции $y = |\sin x + \cos x|$ на $[0; 2\pi]$; 2) решить неравенство $|\sin x + \cos x| > 1$.

19. 1) Построить график функции $y = \cos x \cos 2x$ на $[0; 2\pi]$; 2) решить уравнение $\cos x \cos 2x = 0{,}25$.

20. Найти значение параметра a в уравнении $\cos^6 x + \sin^6 x - \cos^2 2x - a = 0$, если $x = \pm\dfrac{\pi}{12} + \dfrac{\pi k}{12}$ являются решениями этого уравнения.

21. Найти значения параметров a, b, c, d в уравнениях системы

$$\left.\begin{aligned} \sin ax + d\cos y &= 0, \\ c\sin^2 x + \cos^2 by &= 1, \end{aligned}\right\}$$

решениями которой являются

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, \\ y_1 &= \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n; \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} x_2 &= (-1)^{k+1}\frac{\pi}{6} + \pi k, \\ y_2 &= \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n. \end{aligned}\right\}$$

22. Решить систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} x - y &= \frac{5}{3}\pi, \\ \sin x &= 2\sin y. \end{aligned}\right\}$$

23. Решить уравнение $\sin^5 x + \cos^5 x = 2 - \sin^4 x$.

24. Решить систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} \sin x - \frac{1}{\sin x} &= \sin y, \\ \cos x - \frac{1}{\cos x} &= \cos y. \end{aligned}\right\}$$

25. 1) Построить графики функций $y_1 = 4\cos^2 x - \operatorname{tg} 2x$ и $y_2 = \operatorname{ctg} x$ на $[0; \pi]$; 2) решить уравнение $4\cos^2 x - \operatorname{tg} 2x = \operatorname{ctg} x$, если $0 < x < \pi$.

26. Найти множество решений уравнения $\sin x \sin 7x = 1$.

27. Сколько корней на отрезке $[0; \pi]$ имеет уравнение $\sin x + 2\sin 2x = 3 + \sin 3x$?

28. Решить уравнение $\sin x + \sin 9x = 2$.

29. Решить уравнение $\sin(a + x) + \sin x = \cos\frac{a}{2}$.

30. Найти множество решений уравнения $\sin^2 x + 4\sin x + a = 0$.

31. Решить уравнение $\sin x + 2\cos ax = 3$.

32. Решить уравнение $\log^2_{\sqrt{2}} \cos x - 2a \log_{\sqrt{2}} \cos x = a^2 - 8$.

33. Решить неравенство $\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x} > 1$.

34. Решить уравнение с двумя неизвестными: $\cos y + \cos x - \cos(x + y) = 1{,}5$.

35. Построить графики уравнений $2^{|x|} + |x| = y + x^2 + \sin a$, $x^2 + y^2 = 1$ при некоторых значениях параметра a. Найти все значения a, при которых система этих уравнений имеет только одно решение.

36. Решить систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} |x| + |y| &= 0{,}25\pi, \\ \cos x - \cos y &= \sin(x + y). \end{aligned}\right\}$$

37. Решить уравнение $\sin x = x^2 + x + 1$, предварительно построив графики функций $y = \sin x$ и $y = x^2 + x + 1$.

38. Решить уравнение $2\sin x = 5x^2 + 2x + 3$, предварительно построив графики функций $y = 2\sin x$ и $y = 5x^2 + 2x + 3$.

39. Сколько корней имеет уравнение $100^{\sin x} = x^2$?

40. Решить уравнение $2\cos^2\frac{x^2 + x}{6} = 2^x + 2^{-x}$, предварительно построив графики функций $y_1 = 2\cos^2\frac{x^2 + x}{6}$ и $y_2 = 2^x + 2^{-x}$.

41. Решить уравнение $\log_{0{,}5\sin 2x} \sin x = 0{,}5$.

42. При каких значениях x функция $y = 2(1 + \sin 2x \sin 3x) - 0{,}5(\cos 4x + \cos 6x)$ достигает наименьшего значения? Каково это значение?

43. Решить уравнение

$$4(\log_2 \cos x)^2 + \log_2(1 + \cos 2x) = 3.$$

44. Решить неравенство

$$\left(\frac{7}{6}\right)^{|\sin x|} > \left(\frac{7}{6}\right)^{1 - |\cos x|}.$$

45. Решить уравнение $x^2 + 6x\sin(3xy) + 9 = 0$.

46. Найти x, если известно, что $\operatorname{tg}\alpha = x + 1$, $\operatorname{tg}\beta = x - 1$, $\operatorname{tg}(2\alpha + 2\beta) = -\frac{4x}{3}$.

47. Решить уравнение $6-4x-x^2=\dfrac{5}{\left|\sin\dfrac{y}{x}\cos\dfrac{y}{x}\right|}$.

48. Найти z, если известно, что $\operatorname{tg}\alpha=3^z$, $\operatorname{tg}\beta=3^{-z}$, $\alpha-\beta=\dfrac{\pi}{6}$.

49. Решить уравнение $\sin^2 4x+\cos^2 x=2\sin 4x\cos^4 x$.

50. Найти все значения x, удовлетворяющие одновременно следующим условиям: $\cos 13x=\cos x$, $\cos 2x+\sin 5x=1$, $|x|<3$.

51. При каких a уравнение $1+\sin^2 ax=\cos x$ имеет единственное решение?

52. Решить относительно x уравнение

$$\frac{a+\sin x}{a\cos x+1}=\frac{a+\cos x}{a\sin x+1}.$$

53. При каких значениях x функция $y=\sec^2 x+\operatorname{ctg}^2 x+1$ достигает наименьшего значения? Найти это значение.

54. Найти значения x, которые удовлетворяют уравнению $9^{-\cos^2 x}-3^{\cos 2x}=\dfrac{2}{3}$ и неравенству $-2<x<3$.

55. Определить φ и m, если они удовлетворяют следующим условиям: $\sqrt{3}\operatorname{tg}\varphi=(m^2-3m+3)^{0,5}$; $2\cos 2\varphi=2m-3$; $0<\varphi<\dfrac{\pi}{2}$.

56. Определить все целые значения x, при которых выражение

$$\frac{(1-\sin x)^{0,5}}{\lg(-3x^2+10x-3)}$$

является действительным числом.

57. Вычислить $\arcsin\dfrac{1}{3}+\arcsin\dfrac{3}{4}$.

58. Вычислить $\arcsin(\sin 10)$.

59. 1) Построить график функции $y=2\arcsin x$; 2) при каких значениях a уравнение $2\arcsin x=a$ имеет решение?

60. 1) Построить график уравнения $|y|=3\arcsin\sqrt{x}$; 2) решить уравнение $3\arcsin\sqrt{x}-\pi=0$.

61. Решить уравнение $\cos(2\arcsin x)=\cos(\arccos 2x)$.

62. 1) Построить график функции $y=\arcsin 2x+\arcsin x$; 2) решить уравнение $\arcsin 2x+\arcsin x=\dfrac{\pi}{3}$.

63. Решить уравнение $\arccos x\sqrt{3}+\arccos x=0{,}5\pi$.

64. Решить неравенство 1) $\arcsin x-2\arccos x>\dfrac{\pi}{3}$; 2) $\arcsin x-\operatorname{arcctg} x>0$.

65. 1) Построить графики функций $y_1=\arcsin(1-x)$, $y_2=2\arcsin x$, $y=y_1-y_2$; 2) решить уравнение $\arcsin(1-x)-2\arcsin x=0{,}5\pi$.

66. Решить уравнение $\arcsin\dfrac{3x}{5}+\arcsin\dfrac{4x}{5}=\arcsin x$.

67. 1) Построить графики уравнений $y_1=\arcsin x$, $y_2=\arccos\sqrt{1-x^2}$; 2) решить уравнение $\arcsin x=\arccos\sqrt{1-x^2}$.

68. 1) Построить графики уравнений $y=\arcsin(\sin x)$, $y=\arccos(\cos x)$; 2) решить уравнение $\arcsin(\sin x)=\arccos(\cos x)$.

69. Решить неравенства: 1) $\arcsin(x^2-2x-2)>\dfrac{\pi}{4}$; 2) $\arcsin(\sin x)>x^2$; 3) $\operatorname{arctg}\sqrt{x}<\arccos(1-x)$; 4) $\operatorname{arctg}2x+\operatorname{arctg}3x<0{,}75\pi$; 5) $\arcsin 0{,}6\,x+$

$+\arcsin 0{,}8\,x > \arcsin x$; 6) $2\arcsin x < \arccos\sqrt{1-4x^2}$; 7) $\arccos x - 2\arcsin a > 0$; 8) $\operatorname{arcctg} x - \operatorname{arctg} 2a < 0$.

70. Решить систему уравнений:

1) $\left.\begin{aligned}&\sin x\cos y = -0{,}5,\\&\cos x\sin y = 0{,}5;\end{aligned}\right\}$ 2) $\left.\begin{aligned}&5\sin x - \sin y = 0,\\&3\cos x + \cos y - 2 = 0;\end{aligned}\right\}$

3) $\left.\begin{aligned}&\operatorname{tg} x\operatorname{tg} y - 1 = 0,\\&\sin x\cos y + \operatorname{ctg} x\operatorname{tg} y - 0{,}5 = 0;\end{aligned}\right\}$ 4) $\left.\begin{aligned}&\sin(3x+2y) = 0{,}25\sin x,\\&\sin y = 4\sin(2x+3y).\end{aligned}\right\}$

71. Решить уравнение $\log_{\operatorname{tg} x}\dfrac{1-\sin 2x}{1+\cos 2x} + \log_{(\operatorname{tg} x - 1)}\dfrac{1-\cos 2x}{\sin 2x} + \log_{\operatorname{tg} x} 2 = 3$.

72. Определить все решения неравенства $\sqrt{\cos x - \sin x} - \sin x + 0{,}5 \geqslant 0$, принадлежащие отрезку $[0;\ \pi]$.

73. Определить все значения a, при которых уравнение $\cos x + \sqrt{1+a}\sin x - \sqrt{1-a} = 1$ имеет решение.

74. Определить все решения неравенства

$$\frac{\lg\sin x + \lg\cos x}{\lg(\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x) - 2\lg 2} > 1,$$

принадлежащие отрезку $[0;\ 2\pi]$.

75. Определить все решения неравенства

$$\log_{2\operatorname{tg} x}\sqrt{\frac{2\cos 2x}{1+\cos x}} - 0{,}5 \leqslant 0,$$

принадлежащие отрезку $[0;\ 2\pi]$.

76. Определить число решений системы уравнений

$$\left.\begin{aligned}&\left(1 + \frac{\left|\cos\dfrac{\pi a}{2}\right|}{\cos\dfrac{\pi a}{2}}\right)\left(2x - y^2 - \frac{20}{9}\right) = 4(x+y-2),\\&x^2 + y^2 = a\end{aligned}\right\}$$

при различных значениях параметра a ($|a| \neq 2n+1$; $n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$).

§ 8. О приближенных методах решения уравнений

Метод проб

Существует несколько методов приближенного решения уравнений (метод итераций, хорд, касательных). Однако наиболее доступным для понимания учащихся средней школы является метод проб. Его применение основано на простейших свойствах непрерывных функций.

На примере покажем, как с помощью таблиц функций и их графиков методом проб можно достаточно быстро определить не только приближенные, но во многих случаях и точные значения корней сложных уравнений.

Пример. Определить действительные корни уравнения

$$f(x) = x^4 + 4x - 1 = 0.$$

Преобразуем это уравнение к виду

$$x^4 = 1 - 4x.$$

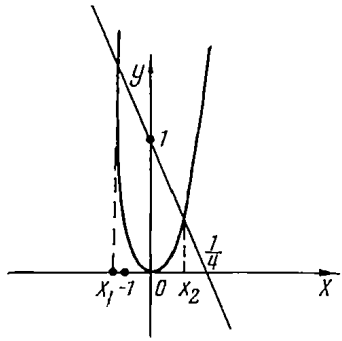


Рис. 49

Построим графики функций $y_1 = 1 - 4x$, $y_2 = x^4$ (рис. 49). Из рис. 49 видно, что данное уравнение имеет два действительных корня x_1 и x_2, причем $-2 < x_1 < -1$ и $0 < x_2 < 0{,}25$.

Уточним значения этих корней методом проб:

x	-2	-1	$-1{,}4$	$-1{,}5$	$-1{,}8$	$-1{,}7$	$-1{,}6$	$-1{,}65$	$-1{,}68$	$-1{,}66$	$-1{,}67$
$f(x)$	>0	<0	<0	<0	>0	>0	<0	<0	>0	<0	>0

x	$-1{,}665$	$-1{,}663$	$-1{,}664$	$-1{,}6635$
$f(x)$	>0	<0	>0	$x_1 \approx -1{,}6635$

x	0	0,25	0,24	0,2495	0,2493	0,2491	0,2490	0,24905
$f(x)$	<0	>0	<0	>0	>0	>0	<0	$x_2 \approx 0{,}24905$

Итак, получаем $x_1 \approx -1{,}6635$; $x_2 \approx 0{,}24905$.

Вычисляем приближенные значения суммы и произведения x_1 и x_2:

$$x_1 + x_2 \approx -1{,}4145; \quad x_1 \cdot x_2 \approx -0{,}41429.$$

Теперь нетрудно заметить, число 1,4145 есть приближенное значение $\sqrt{2}$, а $-0{,}41429 \approx 1 - \sqrt{2}$.

Итак, получаем гипотезу:

$$x_1 + x_2 = -\sqrt{2}, \quad x_1 \cdot x_2 = 1 - \sqrt{2}.$$

Решив систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 &= -\sqrt{2}, \\ x_1 \cdot x_2 &= 1 - \sqrt{2}, \end{aligned}\right\}$$

получаем

$$x_1 = \frac{-\sqrt{2} - \sqrt{4\sqrt{2} - 2}}{2}, \quad x_2 = \frac{-\sqrt{2} + \sqrt{4\sqrt{2} - 2}}{2}.$$

Проверкой убеждаемся, что найденные таким образом числа действительно являются вещественными корнями исходного уравнения.

Упражнения

1. Найти действительные корни уравнений (методом проб):

1) $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{2x - 3} = \sqrt[3]{12(x - 1)}$;

2) $\sqrt[5]{(x - 2)(x - 32)} - \sqrt[5]{(x - 1)(x - 33)} = 1$;

3) $\left(\sqrt{2 + \sqrt{3}}\right)^x + \left(\sqrt{2 - \sqrt{3}}\right)^x = 2^x$.

§ 9. Эффективность различных методов решения неравенств

В предыдущих параграфах этой главы мы рассмотрели различные методы решения неравенств. Наиболее общими из них являются метод интервалов, а также методы, связанные со всесторонним исследованием свойств непрерывных функций (целых, рациональных, иррациональных, показательных, логарифмических, тригонометрических). Использование графиков этих функций во многих случаях позволяет избежать грубых ошибок и делает решение более обозримым и простым. Особенно эффективен функциональный подход при решении достаточно сложных неравенств.

Поясним сказанное примерами.

Пример 1. Решить относительно x неравенство

$$\sqrt{2ax-a^2} > x-\sqrt{x^2-a^2}. \tag{1}$$

Исследуем функции

$$y_1 = \sqrt{2ax-a^2},$$
$$y_2 = x-\sqrt{x^2-a^2}. \tag{2}$$

Очевидно, $2ax-a^2 \geqslant 0$, если: 1) $a=0$, x — любое действительное число; 2) $a<0$, $x \leqslant 0{,}5a$; 3) $a>0$, $x \geqslant 0{,}5a$. Далее, $x^2-a^2 \geqslant 0$, если: 1) $a=0$, x — любое действительное число; 2) $a<0$, $x \leqslant a$; 3) $a>0$, $x \geqslant a$.

Таким образом, если $a=0$, то решением данного неравенства является любое отрицательное число.

Если $a<0$, то функция y_1 определена на $(-\infty;\ 0{,}5a]$, а y_2 определена на $[-\infty;\ a]$. Очевидно, $(-\infty;\ a] \cap (-\infty;\ 0{,}5a] = (-\infty;\ a]$. Но на $(-\infty;\ a]$ $(a<0)$ функция $y_1 \geqslant a$, а функция $y_2 < 0$. Поэтому если $a<0$, то решением неравенства (1) является $(-\infty;\ a]$.

Если $a>0$, то функция y_1 определена на $[0{,}5a;\ +\infty)$, а y_2 определена на $[a,\ +\infty)$ и $[0{,}5a;\ +\infty) \cap [a;\ +\infty) = [a;\ +\infty)$. На $[a;\ +\infty)$ функция $y_1 \geqslant a$.

Для выяснения того, как изменяется функция y_2 на $[a;\ +\infty)$, преобразуем уравнение (2) следующим образом:

$$y_2 = x-\sqrt{x^2-a^2} = \frac{(x-\sqrt{x^2-a^2})(x+\sqrt{x^2-a^2})}{x+\sqrt{x^2-a^2}} =$$
$$= \frac{a^2}{x+\sqrt{x^2-a^2}}.$$

Теперь ясно, что на $[a;\ +\infty)$ функция $y_2 \leqslant a$. Поэтому если $a>0$, то решением неравенства является $[a;\ +\infty)$.

Пример 2. Решить неравенство

$$\frac{|x^2-3x+1|}{|x^2-1|} > 1. \tag{3}$$

Исследуем функцию

$$y = \frac{|x^2-3x+1|}{|x^2-1|} - 1.$$

Она определена и непрерывна на $(-\infty;\ -1)$, $(-1;\ 1)$ и $(1;\ +\infty)$. Для определения нулей этой функции решаем уравнения:

$$\frac{x^2-3x+1}{x^2-1} = 1, \tag{4}$$

$$\frac{x^2-3x+1}{x^2-1}=-1. \qquad (5)$$

Уравнение (4) имеет одно решение: $x_1=\frac{2}{3}$.

Корни уравнения (5): $x_2=0$; $x_3=1{,}5$.

Теперь ясно, что функция y непрерывна и не равна нулю на

$$(-\infty;\ -1);\ (-1;\ 0);\ \left(0;\ \frac{2}{3}\right);\ \left(\frac{2}{3};\ 1\right);\ (1;\ 1{,}5);\ (1{,}5;\ +\infty).$$

Решениями неравенства (3) являются те из этих интервалов, на которых непрерывная функция y положительна.

Функция y непрерывна на $(-\infty;\ -1)$ и $y(-2)>0$. Поэтому $y>0$ на $(-\infty;\ -1)$.

Функция y непрерывна на $(-1;\ 1)$. Точка $-0{,}5\in(-1;\ 0)$ и $y(-0{,}5)>0$. В точках 0 и $\frac{2}{3}$ функция y меняет знак. Поэтому на $\left(0;\ \frac{2}{3}\right)$ $y<0$, а на $(-1;\ 0)$ и $\left(\frac{2}{3};\ 1\right)$ $y>0$.

Функция y непрерывна на $(1;\ +\infty)$. Точка $2\in(1{,}5;\ +\infty)$ и $y(2)<0$. В точке $x=1{,}5$ функция y меняет знак. Поэтому на $(1;\ 1{,}5)$ $y>0$.

Окончательно получим $X=(-\infty;\ -1)\cup(-1;\ 0)\cup\left(\frac{2}{3};\ 1\right)\cup$ $\cup(1;\ 1{,}5)$.

Глава 4. РАЗНЫЕ ЗАДАЧИ

§ 1. Алгебраический метод решения текстовых задач

О составлении уравнений по условию задач

Мы не останавливаемся здесь на анализе той схемы решения текстовых задач методом составления уравнений, которой пользуются ученики восьмилетней и средней школы. Она хорошо оправдывает себя при решении несложных задач. При решении же сложных задач трудно с самого начала установить, какую из неизвестных величин целесообразно обозначить через x, и еще труднее выразить через одну (или даже две переменные) все остальные неизвестные величины. Такой подход затрудняет и составление уравнений. Поэтому главное при решении сложной текстовой задачи — последовательный перевод на язык уравнений каждого ее предложения. При этом мы не ограничиваем себя количеством переменных, которые войдут в эти уравнения.

Поясним сказанное примером.

Задача. Из пункта A в пункт B выехал автомобиль, одновременно из пункта B навстречу ему выехал мотоцикл. Через некоторое время они встретились. В момент их встречи из B в A выехал второй мотоцикл и в некоторый момент времени встретился с автомобилем. Расстояние между пунктами первой и второй встреч равно $\frac{2}{9}|AB|$. Если бы скорость автомобиля была на 20 км/ч меньше, то автомобиль встретился бы с первым мотоциклом через 3 ч после их выезда и расстояние между пунктами встреч было бы равно 30 км. Определить расстояние от A до B, если скорости обоих мотоциклов одинаковы, причем скорость мотоцикла не больше скорости автомобиля.

В задаче говорится о следующих неизвестных величинах:

$S = |AB|$ — расстояние между пунктами A и B (км);

$v_а$ — скорость автомобиля (км/ч);

$v_м$ — скорость мотоцикла;

$S_а$ — расстояние, которое прошел автомобиль до встречи с первым мотоциклом;

$S_{м_1}$ — расстояние, которое прошел первый мотоцикл до встречи с автомобилем;

S_a' — расстояние, которое прошел автомобиль до встречи со вторым мотоциклом;

$S_{м_2}$ — расстояние, которое прошел второй мотоцикл до встречи с автомобилем;

t_a — время, за которое автомобиль прошел путь S_a (ч);

t_a' — время, за которое автомобиль прошел путь S_a';

t_a'' — время, через которое встретился автомобиль со вторым мотоциклом (при уменьшенной скорости автомобиля на 20 км/ч);

$t_{м_1}$ — время, за которое первый мотоцикл прошел расстояние $S_{м_1}$;

$t_{м_2}$ — время, за которое второй мотоцикл прошел расстояние $S_{м_2}$.

Из первого и второго предложения задачи узнаем, что:

$$t_a = t_{м_1},\ S_a = v_a t_a,$$
$$S_{м_1} = v_м t_{м_1} = v_м t_a,$$
$$S_a + S_{м_1} = S$$

или

$$v_a t_a + v_м t_a = S. \tag{1}$$

Из третьего предложения следует, что

$$v_a t_a' + v_м (t_a' - t_a) = S. \tag{2}$$

В четвертом предложении говорится, что

$$S_a' - S_a = \frac{2}{3} S,$$

т. е.

$$v_a t_a' - v_a t_a = \frac{2}{9} S. \tag{3}$$

Из пятого предложения получаем:

$$(v_a - 20) \cdot 3 + v_м \cdot 3 = S, \tag{4}$$

$$(v_a - 20)\, t_a'' + v_м (t_a'' - 3) = S \tag{5}$$

и

$$(v_a - 20)\, t_a'' - (v_a - 20) \cdot 3 = 30. \tag{6}$$

Таким образом, определение расстояния $|AB|$ свелось к решению системы уравнений (1) — (6).

Исключив t_a'' из уравнений (5) и (6), получаем

$$\frac{S + 3v_м}{v_a + v_м - 20} = \frac{3v_a - 30}{v_a - 20}. \tag{7}$$

Исключив $t_а'$ из уравнений (2) и (3), имеем

$$\frac{S + v_м t_а}{v_а + v_м} = \frac{\frac{2}{9} S + v_а t_а}{v_а}. \tag{8}$$

После исключения $t_а$ из уравнений (1) и (8) следует

$$\frac{v_а + 2v_м}{v_а + v_м} = \frac{11v_а + 2v_м}{9v_а}. \tag{9}$$

Преобразовав уравнение (9), получаем

$$\left(\frac{v_м}{v_а}\right)^2 - \frac{5}{2}\left(\frac{v_м}{v_а}\right) + 1 = 0.$$

Отсюда $v_м : v_а = 2$ или $v_м : v_а = 1 : 2$. Но так как по условию задачи $v_м \leqslant v_а$, то

$$v_а = 2v_м. \tag{10}$$

Из уравнений (7) и (4) находим

$$\frac{2v_м + v_а - 20}{v_а + v_м - 20} = \frac{v_а - 10}{v_а - 20}. \tag{11}$$

Решив систему уравнений (10) и (11), получаем:

1) $\begin{cases} v_{м_1} = 20 \text{ км/ч}, \\ v_{а_1} = 40 \text{ км/ч}; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} v_{м_2} = 5 \text{ км/ч}, \\ v_{а_2} = 10 \text{ км/ч}. \end{cases}$

Очевидно, второе решение не удовлетворяет условию задачи.

Подставив значения $v_а$ и $v_м$ в уравнение (4), получаем ответ: $S = 120$ км.

Упражнения

1. Два мальчика измеряют садовую дорожку шагами, начав двигаться с противоположных ее концов. После того как каждый из них сделал по 10 шагов, расстояние между ними стало равным 22 м. Найти длину садовой дорожки, если известно, что шаг одного мальчика на 20 см короче шага другого, и, чтобы пройти всю дорожку, ему надо сделать на 10 шагов больше, чем товарищу.

2. Тело, взвешенное на неравноплечих рычажных весах, уравновешивается при взвешивании на одной чашке грузом a, при взвешивании на другой — грузом b. Каков истинный вес тела?

3. Задан цилиндр с радиусом основания x и высотой y. Найти зависимость y от x и изобразить ее графически, если известно, что сумма площадей оснований на 2π квадратных единиц меньше площади боковой поверхности.

4. Из пунктов A и B одновременно навстречу друг другу выехали два велосипедиста, которые встретились в 12 км от пункта B. Продолжая свое движение и доехав до пунктов B и A, они сразу же повернули обратно и снова встретились в 6 км от A. Определить скорость велосипедистов и расстояние $|AB|$, если известно, что второй велосипедист вернулся в пункт B через 1 ч после того, как первый вернулся в пункт A.

5. Поезд должен пройти расстояние от A до B за определенное время. После трехчасового пути он был задержан на промежуточной станции на 1 ч и, чтобы прибыть в срок, оставшуюся часть пути шел со скоростью на 4 км/ч большей, чем первоначальная. Если бы с такой скоростью он шел весь путь AB, то он прибыл бы в B на 1 ч 12 мин раньше. Найти расстояние $|AB|$.

6. Рабочие Иванов и Петров обрабатывают детали на двух станках-автоматах. По плану они должны выпускать вместе 2000 деталей в неделю. В первую неделю оба работали с одинаковой скоростью. Во вторую неделю Петров повысил скорость обработки, но из-за болезни работал только 27 ч вместо полной рабочей недели, т. е. 41 ч. В третью неделю Иванов ушел в отпуск, и вместо него поставили Новикова. Новиков потратил 1 ч на ознакомление со станком, после чего начал работать, но до конца недели работал на малой скорости и обрабатывал на 6 деталей в час меньше, чем Иванов. Петров же выздоровел и всю третью неделю работал с такой же скоростью, как во вторую. Оказалось, что в третью неделю было выпущено на 180 деталей больше, чем во вторую, и на 104 детали меньше, чем в первую. Сколько деталей в час обрабатывал каждый рабочий в каждую неделю? Определите процент выполнения плана в каждую неделю.

7. Коров кормили двумя видами кормов. В 1 ц первого вида содержится 15 кг белка и 80 кг углеводов. В 1 ц второго вида содержится 5 кг белка и 30 кг углеводов. Всего коровы получили 58 ц углеводов и 10,5 ц белка. Найти общий вес корма, данного коровам.

8. Два стрелка сделали по 30 выстрелов каждый. На мишени обнаружено 40 пробоин. Сколько раз попал каждый, если известно, что у первого стрелка на один неудачный выстрел приходилось в 5 раз больше удачных выстрелов, чем у второго стрелка?

9. Группа студентов, состоящая из 30 человек, получила на экзамене оценки «2», «3», «4», «5». Сумма полученных оценок равна 93, причем «троек» было больше, чем «пятерок», и меньше, чем «четверок». Кроме того, число «четверок» делилось на 10, а число «пятерок» было четным. Определить, сколько каких оценок получила группа.

10. У школьника есть 1 руб. монетами достоинством до 10 коп. включительно. Известно, что если отобрать по одной монете каждого типа, имеющегося у школьника, то в сумме получится 15 коп. Сколько монет каждого достоинства имеется, если монет самого большого достоинства больше числа всех прочих монет на 4?

11. Квадрат целого положительного числа K, увеличенный на девять, делится без остатка на неполное частное от деления числа K на три и дает в частном 130. Найдите K.

12. Три тракторные бригады вместе вспахивают поле за 4 дня. Первая и вторая бригады вместе вспахали бы это поле за 6 дней, а первая и третья — за 8 дней. Во сколько раз вторая бригада вспахивает за день больше, чем третья?

13. Двое рабочих получили одинаковые задания: изготовить определенное число деталей за определенный срок. Первый выполнил задание в срок, а второй выполнил в срок только 90% задания, не додав столько деталей, сколько первый делал за 40 мин. Если бы второй рабочий делал в час на три детали больше, он выполнил бы задание на 95%. Сколько деталей должен был изготовить каждый рабочий?

14. В реку впадает приток. На притоке на некотором расстоянии от его устья расположен пункт A. На реке на таком же расстоянии от устья притока расположен пункт B. Время, которое требуется моторной лодке, чтобы доплыть от пункта A до устья притока и обратно, относится ко времени, которое требуется ей, чтобы доплыть от пункта B до устья притока и обратно, как 32 : 35. Если бы скорость моторной лодки была на 2 км/ч больше, то это от-

ношение было бы равно 15 : 16, а если бы скорость моторной лодки была на 2 км/ч меньше, то отношение было бы равно 7 : 8. Найти скорость течения реки. Расстояния измеряются вдоль притока и реки соответственно.

15. Поезд, следующий из пункта A в B, делает по пути некоторое число остановок. На первой остановке в поезд садится 5 пассажиров, а на каждой следующей — на 10 пассажиров больше, чем на предыдущей. На каждой остановке 50 пассажиров выходит из поезда. Возможен ли случай, когда в B прибывает менее 12 пассажиров, если из A их выезжает 462?

16. Некоторое предприятие приносит убытки, составляющие 31 тыс. руб. в год. Для превращения его в рентабельное было предложено увеличить ассортимент продукции. Подсчеты показали, что дополнительные доходы, приходящиеся на каждый новый вид продукции, составят 25 тыс. руб. в год, а дополнительные расходы окажутся равными 5 тыс. руб. в год при освоении одного нового вида, но освоение каждого последующего потребует на 10 тыс. руб. в год больше расходов, чем освоение предыдущего. Можно ли указанным способом сделать предприятие рентабельным?

§ 2. Задачи на восстановление чисел

Пример задачи на восстановление чисел

Задачи на восстановление чисел носят ярко выраженный комбинаторный характер.

При решении таких задач используется ряд свойств натуральных чисел: произведение четных чисел есть четное число; произведение нечетных чисел есть нечетное число; условия при которых при умножении k-значного числа на однозначное число получаем k- или $(k+1)$-значное число; признаки делимости натуральных чисел и т. п.

Пример. Восстановить числа («x» обозначают цифры от 0 до 9):

$$
\begin{array}{ll|l}
(1) & xx7xxxxxxx & xxxx7x \\ \cline{3-3}
(2) & \underline{xxxxxx} & xx7xx \\
(3) & xxxxx7x & \\
(4) & \underline{xxxxxxx} & \\
(5) & x7xxxx & \\
(6) & \underline{x7xxxx} & \\
(7) & xxxxxxx & \\
(8) & \underline{xxxx7xx} & \\
(9) & xxxxxx & \\
(10) & \underline{xxxxxx} & \\
 & 0 &
\end{array}
$$

Для упрощения рассуждений пронумеруем строчки, в которых записаны числа, получаемые в процессе деления, цифрами от 1 до 10.

Делитель — шестизначное число. Третья цифра частного — 7. При умножении шестизначного числа на 7 получили шестизначное число (6-я строчка). Но это возможно только в том случае, если делитель начинается цифрой 1. Итак, делитель имеет вид

$$1xxx7x.$$

Для упрощения рассуждений делитель и частное запишем в виде:

$$1АБВ7Г,$$
$$ДЕ7ЖК.$$

Далее, шестизначные числа записаны во 2-, 6-,10-й, семизначные числа—в 4- и 8-й строчках. Поэтому

$$Е = 8 \text{ или } Е = 9,\ Ж = 8 \text{ или } Ж = 9,\ 1 \leqslant А \leqslant 4.$$

Если при умножении числа $1АБВ7Г$ на 8 или 9 получается семизначное число, то оно обязательно начинается цифрой 1. Поэтому числа в 4-й и 8-й строчке начинаются цифрой 1.

Допустим, что $А = 4$. Тогда число из 6-й строчки начиналось бы цифрой 9. Но этого не может быть, так как при вычитании из шестизначного числа (строчка 5) шестизначного числа (строчка 6) получаем шестизначное число (строчка 7). Итак, $А \neq 4$.

По этой же причине $А \neq 3$.

Следовательно,

$$А = 1 \text{ или } А = 2.$$

Допустим, что $А = 1$. Тогда на основании 6-й строчки получаем, что $Б = 1$ ($Б$ не может быть равно нулю в силу 4-й и 8-й строчек; $Б$ не может быть больше 1 в силу 6-й строчки).

Итак, допустим, что делитель имеет вид

$$111В7Г.$$

В силу 4-й и 8-й строчек $В \neq 0$. С другой стороны, $В < 4$ (в силу 6-й строчки).

Если делитель имеет вид

$$11117Г,\ 11127Г \text{ или } 11137Г,$$

то при любом значении $Г$ в 8-й строчке третья цифра справа не будет равна 7.

Следовательно, $А \neq 1$ и $В > 3$.

Итак, делитель имеет вид

$$12БВ7Г.$$

Все до сих пор установленное внесем в данный пример:

```
xx7xxxxxxx | 12БВ7Г
xxxxxx     |-------
-------    | ДЕ7ЖК
xxxxx7x
1xxxxxx
-------
  x7xxxx
  87xxxx
  ------
  xxxxxxx
  1xxx7xx
  -------
    xxxxxx
    xxxxxx
    ------
    0
```

Теперь понятно, что первой цифрой 5-й строчки является 9, а 7-я и 8-я строчки начинаются цифрами 1 и 0:

```
xx7xxxxxxx | 12БВ7Г
xxxxxx     |-------
-------    | ДЕ7ЖК
xxxxx7x
1xxxxxx
-------
  97xxxx
  87xxxx
  ------
  10xxxxx
  10xx7xx
  -------
    xxxxxx
    xxxxxx
    ------
    0
```

Так как

$$120 \cdot 9 = 1080,\ 121 \cdot 9 = 1089,\ 122 \cdot 9 = 1098,\ 123 \cdot 9 = 1107,$$

то в силу 8-й строчки третья цифра этой строчки не может быть больше 2, если $Ж = 9$. Но

$$120 \cdot 7 = 840,\ 121 \cdot 7 = 847,\ 122 \cdot 7 = 854.$$

Поэтому в силу 6-й строчки $Ж \neq 9$. Итак, $Ж = 8$.

Далее,

$$123 \cdot 7 = 861,\ 124 \cdot 7 = 868,\ 125 \cdot 7 = 875,\ 126 \cdot 7 = 882.$$

Отсюда и в силу 6-й строчки следует, что $Б = 4$ или $Б = 5$. Но $Б \neq 4$, так как $1249 \cdot 8 = 9992$ (см. 8-ю строчку). Следовательно, $Б = 5$.

Сравнивая 3-ю и 4-ю строчки, получаем, что 3-я строчка начинается с 1 (больше единицы первая цифра 3-й строчки не может быть еще и потому, что первая цифра делителя 1).

Кроме того,

$$125 \cdot 8 = 1000, \quad 126 \cdot 8 = 1008.$$

Поэтому третья цифра 8-й строчки 0. Теперь имеем такую картину:

$$\begin{array}{l|l}
xx7xxxxxxx & 125B7\Gamma \\
\underline{xxxxxx} & \\
1xxxx7x & \underline{} \\
\underline{1xxxxxx} & \\
\quad 97xxxx & \\
\quad \underline{87xxxx} & \\
\quad 10xxxxx & \\
\quad \underline{100x7xx} & \\
\quad\quad xxxxxx & \\
\quad\quad \underline{xxxxxx} & \\
\quad\quad 0 &
\end{array}$$

Далее, $1251 \cdot 7 = 8757$, $1252 \cdot 7 = 8764$, $1253 \cdot 7 = 8771$, $1254 \cdot 7 = 8778$, $1255 \cdot 7 = 8785$, $1256 \cdot 7 = 8792$, $1257 \cdot 7 = 8799$, $1258 \cdot 7 = 8806$.

Поэтому (см. 6-ю строчку) $1 \leqslant B \leqslant 7$.

При умножении числа $125B7\Gamma$ (при любом значении Γ) на 8 третья цифра справа (в 8-й строчке) будет равна 7 только в том случае, если произведение $B \cdot 8$ оканчивается цифрой 2 ($8B$ — число четное). Но это возможно, если $B = 4$ или $B = 9$. Но $1 \leqslant B \leqslant 7$. Итак, $B = 4$.

Так как $7 \cdot 8 = 56$, то $\Gamma \cdot 8 < 40$, т. е. $\Gamma \leqslant 4$.

Далее,

$$125470 \cdot 7 = 878290 \text{ и } 125474 \cdot 7 = 878318.$$

Поэтому третья цифра слева в 6-й строчке 8, третья цифра слева в 5-й строчке 9, тогда

$$\begin{array}{l|l}
xx7xxxxxxx & 12547\Gamma \\
\underline{xxxxxx} & \\
1xxxx7x & \underline{} \\
\underline{1xxxxxx} & \\
\quad 979xxx & \\
\quad \underline{878xxx} & \\
\quad 101xxxx & \\
\quad \underline{100x7xx} & \\
\quad\quad 1xxxxx & \\
\quad\quad \underline{xxxxxx} & \\
\quad\quad 0 &
\end{array}$$

Из 9-й строчки следует, что $K = 1$.

Так как

$$125471 \cdot 8 = 1003768, \quad 125474 \cdot 8 = 1003792,$$

то при $Г \leqslant 4$ четвертая цифра слева в 8-й строчке 3 и, следовательно, четвертая цифра слева в 7-й строчке 6 (6, а не 5, потому что $7 + 5 = 12$).

Теперь получаем

$$\begin{array}{l|l}
xx7xxxxxxx & 12547Г \\
\underline{xxxxxx} & \\
1xxxx7x & ДЕ781 \\
\underline{1xxxxxx} & \\
979xxx & \\
\underline{878xxx} & \\
1016xxx & \\
\underline{10037xx} & \\
12547x & \\
\underline{12547x} & \\
0 &
\end{array}$$

Сравнивая 5-, 6- и 7-ю строчки, получаем, что четвертая цифра слева в 6-й строчке не должна быть больше 3. А это возможно, если $2 \leqslant Г \leqslant 4$.

В 7-й строчке пятая цифра слева может быть равна 2 или 3. Но так как

$$125472 \cdot 8 = 1003776, \quad 125473 \cdot 8 = 1003784, \quad 125474 \cdot 8 = 1003792,$$

то пятая цифра слева в 7-й строчке может быть только 3 и четвертая цифра в 6-й строчке 3.

С учетом этого получаем следующую ситуацию:

$$\begin{array}{l|l}
xx7xxxxxxx & 12547Г \\
\underline{xxxxxx} & \\
1xxxx7x & ДЕ781 \\
\underline{1xxxxxx} & \\
9799xx & \\
\underline{8783xx} & \\
10163xx & \\
\underline{10037xx} & \\
12547x & \\
\underline{12547x} & \\
0 &
\end{array}$$

Сравнивая 3-, 4- и 5-ю строчки, получаем, что в 4-й строчке вторая цифра справа может быть 8 или 7. Но

$$12547 \cdot 9 = 112923 \text{ и } 18 \leqslant 9Г \leqslant 40.$$

Поэтому $E \neq 9$, т. е. $E = 8$. Но

$$12547 \cdot 8 = 100376 \text{ и } 16 \leqslant 8Г \leqslant 32.$$

Поэтому $Г = 2$ или $Г = 3$, и, следовательно, получим

$$\begin{array}{l|l}
xx7xxxxxxx & 12547Г \\
\underline{xxxxxx} & \\
110177x & Д8781 \\
\underline{10037xx} & \\
9799xx & \\
\underline{8783xx} & \\
10163xx & \\
\underline{10037xx} & \\
12547x & \\
\underline{12547x} & \\
0 &
\end{array}$$

Из первых трех строчек ясно, что в 3-й строчке третья цифра слева 6 или 7. Непосредственной проверкой убеждаемся, что это будет только в том случае, если $Д = 3$ или $Д = 5$ соответственно.

Легко проверить, что $Д \neq 3$. Итак, $Д = 5$.

Теперь очевидно, что $Г = 3$.

Окончательно находим: при делении числа 7375428413 на 125473 получаем 58781.

Упражнения

1. Восстановить цифры делимого, делителя и частного:

1)
$$\begin{array}{l|l}
xx\ xxx\ xxx & xxx \\
\underline{xx\ xx} & \\
xxx & x7xxx \\
\underline{xxx} & \\
xxxx & \\
\underline{xxx} & \\
xxxx & \\
\underline{xxxx} & \\
0 &
\end{array}$$

2)
$$\begin{array}{l|l}
\underline{-}xxxxxx & xxx \\
\underline{-}xxxx & \\
\underline{-}xxx & x8x \\
\underline{-}xxx & \\
\underline{-}xxxx & \\
\underline{-}xxxx & \\
0 &
\end{array}$$

2. В задаче каждая буква и каждый знак «x» обозначают цифры от 0 до 9 ($A \neq 0$).

$$\begin{array}{r}
ATOM \cdot ATOM \\
\hline
xxxxx \\
xxxxx \\
xxxxx \\
xxxxx \\
\hline
xxxxATOM
\end{array}$$

Различные буквы соответствуют различным цифрам. Замените буквы и «x» цифрами.

§ 3. Методы решения логических задач*

Матричный метод

Рассмотрим матрицу из n строк и n столбцов. Любое из направлений по строкам или столбцам назовем входом. Для названной матрицы есть четыре входа: сверху, снизу, слева, справа. Будем называть элемент матрицы совместным, если к нему можно подойти по любому входу. Если этого сделать нельзя, такой элемент назовем несовместным. Применение матричного метода покажем на примере. Несовместные элементы на рисунках будут заштрихованы.

Пример 1. В купе одного из вагонов Москва — Одесса ехали: москвич, ленинградец, туляк, киевлянин, харьковчанин, одессит. Их фамилии начинались буквами *А*, *Б*, *В*, *Г*, *Д*, *Е*. В дороге выяснилось, что: 1) *А* и москвич — врачи, *Д* и ленинградец — учителя, а туляк и *В* — инженеры; 2) киевлянин, *Б* и *Е* — участники Отечественной войны, а туляк в армии не служил; 3) харьковчанин старше *А*, одессит старше *В*, а *Е* — самый молодой; 4) *Б* и москвич сошли в Киеве, а *В* и харьковчанин — в Виннице.

Определить начальную букву фамилии и профессию каждого пассажира.

Составляем матрицу с двумя входами, по одному входу располагаем местожительство, по второму — фамилии пассажиров (рис. 50). Элементы *АМ*, *ДЛ*, *ТВ*, *АЛ*, *АТ*, *ДМ*, *ДТ*, *ВЛ*, *ВМ* несовместны (по первому условию задачи). По второму условию задачи несовместны элементы *БТ* и *ЕТ*. На входе по столбцу *Т* остался только один элемент. Поэтому по строке *Г* все элементы, кроме *ГТ*, несовместны. По третьему условию несовместны элементы *АХ*, *ВО*, *ЕХ*, *ЕО*. По четвертому условию задачи несовместны элементы *БМ*, *ВХ*, *БХ*. Теперь ясно, что несовместны все элементы из строки *Е*, за исключением *ЕМ*. Несовместны также: все элементы из строки *Д*, кроме *ДХ*; все элементы строки *Б*, кроме *БЛ*; все элементы из строки *А*, за исключением *АО*.

Таким образом, получаем ответ (рис. 51).

Пример 2. В пионерском лагере в одной палатке жили Алексей, Борис, Валерий и Григорий. При знакомстве оказалось, что они учатся в разных классах начальной школы; каждый из них занимается в одном из кружков: шахматном, юннатском, конструкторском, фотокружке. Известно также, что: 1) *А* и второклассник

---

* Материал для этого параграфа заимствован из статей Г. Н. Щеглова «О матричном методе решения логических задач» («Математика в школе», 1966, № 1); Л. Л. Цниман «Логические задачи и алгебра высказываний» («Квант», 1971, № 4); Л. Ю. Березиной «Графы помогают решать логические задачи» («Математика в школе», 1972, № 2).

учатся в одной школе, юннат и первоклассник живут в одном городе, *Б* и фотограф приехали в лагерь позже других; 2) *В* и четвероклассник ходили утром в поход, а вечером *Б* и третьеклассник выиграли в городки у *В* и конструктора; 3) *Г* моложе фотографа, *А* старше *В*, шахматист старше *А*; 4) в воскресенье *А* и конст-

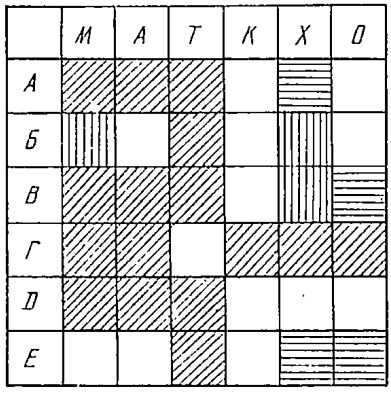


Рис. 50

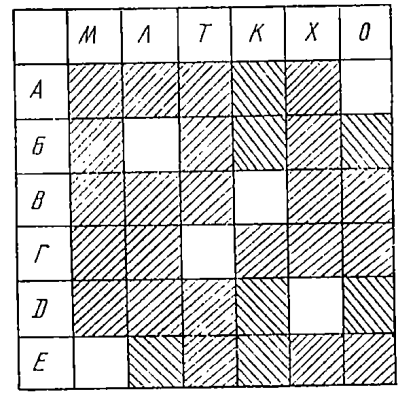


Рис. 51

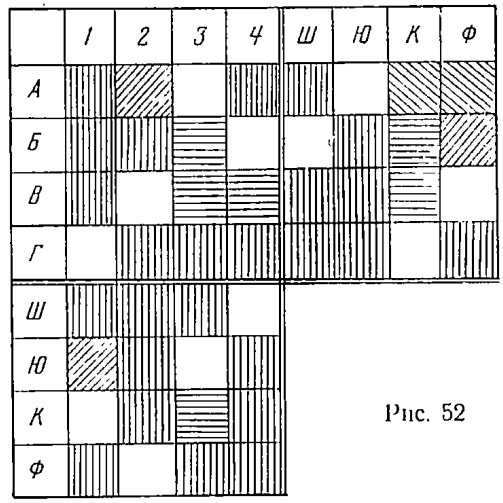


Рис. 52

руктор участвовали в соревновании, четвероклассник был судьей, фотограф был болен. Определите имена и род занятий каждого пионера.

Составляем матрицу с тремя входами (рис. 52). Несовместные элементы отмечаем различной штриховкой в зависимости от условия.

Элементы $2А$, $1Ю$, $БФ$ несовместны (по первому условию задачи). По второму условию несовместны элементы $3Б$, $3В$, $4В$, $К3$, $БК$, $ВК$. По третьему условию несовместны $4Г$, $1Ф$, $4А$, $АШ$, $1А$. Теперь из рис. 52 видно, что $А$ — третьеклассник, потому что шахматист старше $А$ и шахматист может быть только четвероклассником. Отсюда получаем, что несовместны элементы $1Ш$, $2Ш$, $3Ш$, $4Ю$, $4К$, $4Ф$.

Теперь из рис. 52 видно, что несовместен элемент $3Г$, поэтому четвероклассником может быть только $Б$, и несовместны элементы $1Б$, $2Б$. Теперь очевидна несовместность элементов $БЮ$, $ВШ$, $ГШ$.

Из четвертого условия задачи вытекает несовместность элементов $АК$ и $АФ$. Отсюда следует несовместность элементов $ВЮ$, $ГЮ$ и $ГФ$.

Так как $3Г$ моложе фотографа, то элементы $2Г$ и $1В$ несовместны. Оставшиеся несовместные элементы очевидны.

Полученная матрица (рис. 52) дает решение задачи.

Применение алгебры высказываний

В алгебре высказываний элементами являются высказывания, например, «Николай — отличник», «Иван лжет». Для обозначения высказываний будем использовать большие латинские буквы A, B, C, ... Запись зн. $[A] = 1$ означает, что значение высказывания A является истиной; запись зн. $[A] = 0$ означает, что значение высказывания A является ложью. Таким образом, всякое высказывание может принимать только значения 0 или 1.

Логическое произведение высказываний (конъюнкция). Логическое произведение высказываний A и B обозначают так: $A \wedge B$. Эта операция соответствует составному высказыванию «A и B». Такое составное высказывание считают истинным тогда и только тогда, когда оба высказывания истинны. Поэтому в качестве определения операции логического произведения целесообразно взять такую таблицу истинности:

A	B	$A \wedge B$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Логическая сумма высказываний (дизъюнкция). Обозначение логической суммы $A \vee B$. Эта операция соответствует составному высказыванию «A или B». Это высказывание считается истинным

тогда и только тогда, когда истинно хотя бы одно из данных высказываний. Таблица истинности для операции «или»:

A	B	$A \vee B$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Отрицание высказывания. Отрицание высказывания A обозначается так: $\overline{A}$. Отрицание высказывания A соответствует высказыванию «неверно, что A». Поэтому оно определяется следующей таблицей истинности:

A	$\overline{A}$
1	0
0	1

Как и в алгебре чисел, считаем, что операция умножения старше операции сложения. Это позволяет не писать некоторые скобки. Например, выражение

$$(A \wedge B) \vee ((\overline{A} \vee B) \wedge C)$$

можно переписать так:

$$A \wedge B \vee (\overline{A} \vee B) \wedge C.$$

Если известно значение каждого высказывания, входящего в алгебраическое выражение, то с помощью таблиц истинности можно найти значение этого алгебраического выражения. Найдем, например, значения алгебраического выражения $\overline{A} \vee \overline{B}$ при всех возможных значениях его компонент A и B:

A	B	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{A} \vee \overline{B}$
1	1	0	0	0
1	0	0	1	1
0	1	1	0	1
0	0	1	1	1

Сначала по значениям в первых двух столбцах заполняем третий и четвертый столбцы, а потом последний. Эта таблица называется таблицей истинности для выражения $\overline{A}\vee\overline{B}$.

Строим таблицу истинности для $\overline{A\wedge B}$:

A	B	$A\wedge B$	$\overline{A\wedge B}$
1	1	1	0
1	0	0	1
0	1	0	1
0	0	0	1

Последние столбцы в этих таблицах одинаковы. Это значит, что при любых значениях высказываний A и B выражения $\overline{A}\vee\overline{B}$ и $\overline{A\wedge B}$ принимают одинаковые значения. Такие выражения называются равносильными:

$$\overline{A\wedge B}\equiv\overline{A}\vee\overline{B}.$$

Алгебраические выражения, у которых в таблице истинности последний столбец состоит сплошь из единиц (нулей), называются тождественно истинными (тождественно ложными) и обозначаются буквой И (буквой Л).

Приводим простейшие равносильности, некоторыми из которых мы в дальнейшем будем пользоваться как правилами.

1. $A\wedge B\equiv B\wedge A$;
2. $A\vee B\equiv B\vee A$;
3. $(A\wedge B)\wedge C\equiv A\wedge(B\wedge C)$;
4. $(A\vee B)\vee C\equiv A\vee(B\vee C)$;
5. $A\wedge(B\vee C)\equiv(A\wedge B)\vee(A\wedge C)$;
6. $A\vee(B\wedge C)\equiv(A\vee B)\wedge(A\vee C)$;
7. $A\wedge A\equiv A$;
8. $A\vee A\equiv A$;
9. $\overline{A\wedge B}\equiv\overline{A}\vee\overline{B}$;
10. $\overline{A\vee B}\equiv\overline{A}\wedge\overline{B}$;
11. $\overline{\overline{A}}\equiv A$;
12. $A\wedge\overline{A}\equiv$ Л;
13. $A\vee\overline{A}\equiv$ И;
14. $A\wedge$ Л $\equiv$ Л;
15. $A\vee$ И $\equiv$ И;
16. $A\wedge$ И $\equiv A$;
17. $A\vee$ Л $\equiv A$.

Пример 3. Однажды следователю пришлось одновременно допрашивать трех свидетелей: Клода, Жака и Дика. Их показания противоречили друг другу, и каждый из них обвинял кого-нибудь во лжи. Клод утверждал, что Жак лжет, Жак обвинял во лжи

Дика, а Дик уговаривал следователя не верить ни Клоду, ни Жаку. Но следователь быстро вывел их на чистую воду, не задав им ни одного вопроса. Кто из свидетелей говорил правду?

Обозначим показания Клода, Жака и Дика буквами $К$, $Ж$, $Д$.

Мы знаем, что:

1) либо Клод сказал правду, и тогда Жак солгал, либо Клод солгал, и тогда Жак сказал правду;

2) либо Жак сказал правду, тогда Дик солгал, либо Жак солгал, и тогда Дик сказал правду;

3) либо Дик сказал правду, и тогда Клод и Жак солгали, либо Дик солгал, и тогда неверно, что оба других свидетеля солгали.

Эти три составных высказывания на языке алгебры высказываний выглядят следующим образом:

1) $К \wedge \overline{Ж} \vee \overline{К} \wedge Ж$; 2) $Ж \wedge \overline{Д} \vee \overline{Ж} \wedge Д$; 3) $Д \wedge \overline{К} \wedge \overline{Ж} \vee \overline{Д} \wedge (К \vee Ж)$.

Условие задачи выполняется в том случае, если одновременно истинны эти три алгебраические выражения, а следовательно, истинна их конъюнкция:

$$\text{зн. } \{(К \wedge \overline{Ж} \vee \overline{К} \wedge Ж) \wedge (Ж \wedge \overline{Д} \vee \overline{Ж} \wedge Д) \wedge [Д \wedge \overline{К} \wedge \overline{Ж} \vee \overline{Д} \wedge (К \vee Ж)]\} = 1. \quad (1)$$

Получили одно логическое уравнение с тремя неизвестными. Теперь в левой части уравнения (1) выполняем умножение по правилам 1—17:

$$(К \wedge \overline{Ж} \vee \overline{К} \wedge Ж) \wedge (Ж \wedge \overline{Д} \vee \overline{Ж} \wedge Д) \wedge [Д \wedge \overline{К} \wedge \overline{Ж} \vee \overline{Д} \wedge (К \vee Ж)] \equiv$$
$$\equiv (\overline{К} \wedge Ж \wedge \overline{Д} \vee К \wedge \overline{Ж} \wedge Д) \wedge (Д \wedge \overline{К} \wedge \overline{Ж} \vee \overline{Д} \wedge К \vee \overline{Д} \wedge Ж) \equiv \overline{К} \wedge Ж \wedge \overline{Д}.$$

После выполнения равносильных преобразований уравнение (1) заменяется таким:

$$\text{зн. } \{\overline{К} \wedge Ж \wedge \overline{Д}\} = 1.$$

Отсюда получаем

$$\text{зн. } \{\overline{К}\} = 1; \ \text{зн. } \{Ж\} = 1; \ \text{зн. } \{\overline{Д}\} = 1.$$

Таким образом, только Жак сказал правду, показания же Клода и Дика были ложными.

Применение графов

При помощи графов можно наглядно представить объекты и отношения между ними. В этом случае легко усматриваются все логические возможности изучаемой ситуации. Благодаря своей обозримости графы позволяют классифицировать эти возможности, отбросить неподходящие случаи, не выполняя полного перебора

всех случаев. Объекты изображаются точками, а отношения между ними — отрезками.

Пример 4. Три товарища — Иван, Дмитрий и Степан — преподают различные предметы (химию, биологию, физику) в школах Москвы, Ленинграда и Киева. Известно, что:

1) Иван работает не в Москве, а Дмитрий не в Ленинграде;
2) москвич преподает не физику;
3) тот, кто работает в Ленинграде, преподает химию;
4) Дмитрий преподает не биологию.

Какой предмет и в каком городе преподает каждый из товарищей?

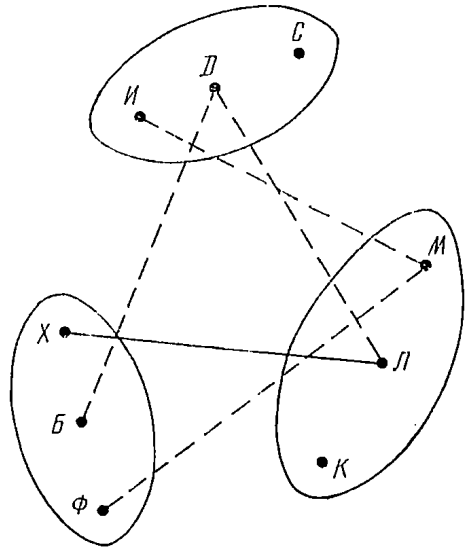


Рис. 53

Выделим три множества: множество имен, множество учебных предметов, множество городов. Элементы множеств обозначим точками (на рис. 53 точкам поставлены в соответствие первые буквы имен, предметов, городов). Две точки разных множеств соединим штриховой линией, если они характеризуют признаки разных людей. Две точки разных множеств соединим сплошными линиями, если они соответствуют признакам одного человека. Граф на рис. 53 содержит все указанные в задаче элементы множеств и отношения между ними. Задача на языке графов свелась к построению трех треугольников со «сплошными» сторонами и вершинами в точках разных множеств.

Строим штриховой отрезок *ХД* (рис. 54), потому что *Л* соответствует *Х* и *Л* не соответствует *Д*, т. е. *Х* не может соответствовать *Д*.

Используем типичную для таких задач операцию на графе: если у треугольника с вершинами в трех разных множествах одна сторона сплошная, а вторая штриховая, то и третья сторона должна быть штриховой.

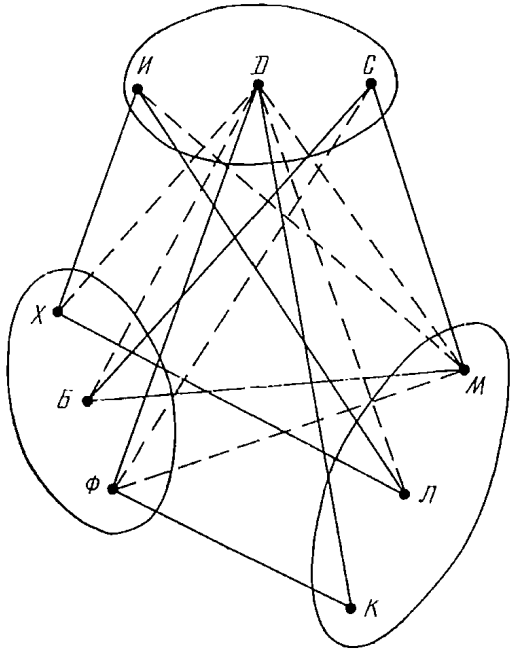


Рис. 54

Очевидно, что если какая-то точка соединена штриховыми отрезками с двумя точками во втором множестве, то ее нужно соединить с третьей точкой этого множества сплошным отрезком. Поэтому строим сплошной отрезок *ФД*.

Строим штриховой отрезок *МД*, потому что в треугольнике *ДФМ* сторона *ДФ* сплошная, а сторона *ФМ* штриховая.

Строим сплошной отрезок *ДК*, потому что отрезки *ДМ* и *ДЛ* штриховые.

Строим сплошной отрезок *ФК*.

Если в треугольнике с вершинами в разных множествах две стороны сплошные, то и третья сторона должна быть сплошной. Таким образом, построен первый «сплошной» треугольник *ДФК*.

Строим «сплошные» отрезки *МС*, *ИЛ*, *ХИ*, *БМ*, *БС*.

Вершины «сплошных» треугольников *ДФК*, *ЛХИ* и *СМБ* дают ответ на вопрос задачи: Степан преподает биологию в Москве, Иван живет в Ленинграде и преподает химию, Дмитрий преподает физику в Киеве.

Упражнения

1. При составлении расписания уроков на понедельник трое учителей высказали пожелания, чтобы их уроки были: по математике — первый или второй; по истории — первый или третий; по литературе — второй или третий. Сколькими способами и как при составлении расписания можно удовлетворить пожелания всех учителей?

2. Маша, Лида, Женя и Катя умеют играть на разных инструментах (виолончели, рояле, гитаре, скрипке), но каждая только на одном. Они же владеют разными иностранными языками (английским, французским, немецким, испанским), но каждая только одним. Девушка, которая играет на гитаре, говорит по-испански. Лида не играет ни на скрипке, ни на виолончели и не знает английского языка. Маша не играет ни на скрипке, ни на виолончели и не знает английского языка. Девушка, которая говорит по-немецки, не играет на виолончели. Женя знает французский язык, но не играет на скрипке.

Кто на каком инструменте играет и какой иностранный язык знает?

3. Четырех подруг спросили, на каком проспекте в Ленинграде и в каком доме живет Аня. Каждая из них сделала два высказывания:

Первая: 1) Аня живет не на Невском проспекте; 2) номер дома 84.

Вторая: 1) Аня живет не на Невском проспекте и не на Чкаловском проспекте; 2) номер дома делится на 2, на 3, на 4 и на 6.

Третья: 1) Аня живет на Чкаловском проспекте; 2) номер дома 96.

Четвертая: 1) Аня живет на Московском проспекте; 2) номер дома оканчивается на 6.

Одно из высказываний каждой подруги верное, а другое ложное. Где живет Аня?

Примечание. Указанные проспекты расположены в различных районах Ленинграда, не пересекаются и не имеют общих домов.

4. Три разбойника хотят поделить добычу. Каждый уверен, что он поделил бы добычу на равные части, но остальные ему не доверяют. Если бы разбойников было двое, то выйти из положения было бы легко: один разделил бы добычу на две части, а другой взял бы ту часть, которая ему кажется большей. Указать, как должны действовать три разбойника, чтобы каждый из них был уверен, что его доля составляет не менее одной трети от всей добычи. (Добыча настолько разнородна, что объективного способа сравнения отдельных частей не существует.)

5. Один из трех гангстеров, известных в городе *М* под кличками Арчи, Босс и Весли, украл портфель с деньгами. На допросе каждый из них сделал три заявления:

Арчи: Я не брал портфеля.
В день кражи я уезжал из города *М*.
Портфель украл Весли.

Босс: Портфель украл Весли.
Если бы я и взял его, я бы не сознался.
У меня и так много денег.

Весли: Я не брал портфель.
Я давно ищу хороший портфель.
Арчи прав, говоря, что он уезжал из города *М*.

В ходе следствия выяснилось, что из трех заявлений каждого гангстера два верных, а одно неверное. Кто украл портфель?

Упражнения к гл. 4

1. Перед вами часы. Сколько существует положений стрелок, по которым нельзя определить время, если не знать, какая стрелка часовая, а какая — минутная? (Считается, что положение каждой из стрелок можно определить точно, но следить за тем, как стрелки двигаются, нельзя.)

2. Доказать, что для любого нечетного числа a найдется такое натуральное число b, что $2^b - 1$ делится на a.

3. Про пять положительных чисел известно, что если из суммы любых трех из них вычесть сумму двух оставшихся, то разность будет положительной. Доказать, что произведение всех десяти таких разностей не превосходит квадрата произведения данных пяти чисел.

4. Доказать, что сумма 45 чисел

$$\operatorname{tg} 1^\circ + \operatorname{tg} 5^\circ + \operatorname{tg} 9^\circ + \cdots + \operatorname{tg} 173^\circ + \operatorname{tg} 177^\circ$$

равна 45.

5. Доказать, что многочлен $p(x)$ с целыми коэффициентами, который при трех различных целых значениях x принимает значение 1, не может иметь ни одного целого корня.

6. В таблице $m \times n$ расставлены произвольные числа. Разрешается одновременно изменить знак у всех чисел какого-то одного столбца или у всех чисел какой-то одной строки. Доказать, что, повторив такую операцию несколько раз, можно получить таблицу, у которой сумма чисел в любом столбце и сумма чисел в любой строке будут неотрицательны.

7. На кольцевой автомобильной дороге стоят несколько одинаковых автомашин. Известно, что если бы весь бензин, имеющийся в этих автомашинах, слили в одну, то эта машина смогла бы проехать по всей кольцевой дороге и вернуться на прежнее место. Доказать, что хотя бы одна из машин, стоящих на дороге, может объехать все кольцо, забирая по пути бензин у остальных автомашин.

8. Доказать, что числа 1, 2, ..., n ни при каком n нельзя разбить на две группы так, чтобы произведение чисел в одной группе равнялось произведению чисел в другой группе.

9. Доказать, что для каждого натурального числа K существует бесконечно много натуральных чисел T, не содержащих в десятичной записи нулей и таких, что T и KT имеют одинаковые суммы цифр.

10. Имеется несколько гирь с весами 1 г, 2 г, 3 г, ..., n г. Их надо разложить на три равные по весу кучки. При каких n это можно сделать?

Часть II. ГЕОМЕТРИЯ

Глава 5. ОБЩИЕ ВОПРОСЫ РЕШЕНИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

§ 1. Схемы решения конструктивных задач*

Общие сведения

Решить задачу построением — это значит построить геометрическую фигуру по данным фигурам и данным зависимостям между элементами этих фигур. Решением конструктивной задачи считается каждая фигура, которая удовлетворяет всем ее условиям.

Конструктивная задача считается решенной при помощи циркуля или линейки (или при помощи других данных нам инструментов), если указана конечная последовательность основных построений, после выполнения которых искомая фигура считается найденной в силу аксиом конструктивной геометрии. Непосредственное расчленение конструктивного решения на основные построения в большинстве случаев приводит к большому числу логических операций. Поэтому если решение данной задачи удалось свести к ранее найденному решению какой-либо другой задачи, то она считается решенной.

При решении почти каждой конструктивной задачи возникает вопрос: как нужно рассуждать, чтобы найти ее решение, чтобы получить все решения и сформулировать те условия, при которых задача имеет решение? Чтобы последовательно рассмотреть все эти вопросы при решении конструктивной задачи, следует придерживаться некоторого плана, т. е. схемы решения. Схемы решения конструктивных задач могут быть различны. Их выбор зависит и от содержания задачи, и от того метода, которым мы намерены решать эту задачу.

Однако при использовании любых схем решения конструктивных задач важно установить, во-первых, получили ли мы при выбранном способе решения все существующие решения задачи, во-вторых, всякая ли получаемая при этом фигура удовлетворяет условию задачи.

При решении задач на построение чаще всего используется четырехэтапная схема, состоящая из анализа, построения, доказатель-

---

* Этот параграф заимствован из работы автора «Методы решения геометрических задач» (Минск, «Вышэйшая школа», 1969).

ства и исследования. Однако может быть использована и двухэтапная схема, состоящая из анализа и синтеза (построения с доказательством). В дальнейшем на конкретных примерах раскрывается сущность этих схем, их общность и различие. Теперь же опишем (в общих чертах) этапы каждой из названных схем.

Четырехэтапная схема

Анализ. В этой схеме анализ включает в себя поиск решения конструктивной задачи. Надо наметить и составить план тех последовательных конструктивных операций, выполнение которых приведет к построению указанной в условии задачи фигуры. Но в любом случае сначала допускается, что искомая фигура построена. Делается чертеж — ее набросок. На этом чертеже отмечаются данные и искомые элементы и устанавливается зависимость между ними. Для того чтобы упростить установление этой зависимости, часто необходимы дополнительные построения. В них, как правило, проявляется метод решения данной задачи. Дополнительные построения должны отвечать двум требованиям: во-первых, они должны быть такими, чтобы их можно было выполнить по данным элементам фигуры, во-вторых, — чтобы по ним можно было построить искомую фигуру. Чертеж-набросок, выполняемый для анализа, не должен сводиться к какому-либо частному случаю, а должен соответствовать наиболее общим требованиям, потому что выводы, верные для частного случая, могут оказаться неверными для более общего случая.

Построение. Оно заключается в том, что указывается последовательность основных построений, которые достаточно выполнить, чтобы получить искомую фигуру. Здесь всегда применяется метод, использованный в анализе.

Доказательство. Необходимо доказать, что построенная фигура является искомой, так как это не всегда очевидно.

Исследование. Задача на построение с конкретными числовыми данными не требует исследования. Решая ее, мы найдем все решения или придем к выводу, что решений нет. Другое дело, если данные величины обозначены буквами, которые могут принимать различные числовые значения. В зависимости от соотношений между этими величинами задача может иметь решение, может и не иметь его. От этих соотношений зависит и число решений задачи. Цель исследования, если имеется в виду исчерпывающее исследование, и состоит в том, чтобы рассмотреть все возможные случаи и выяснить, при каких соотношениях данных величин задача не имеет решения, а при каких имеет и сколько. Если есть возможность, окончательные результаты исследования выражаются математическими формулами через данные в условии задачи величины.

При исследовании иногда полезны чертежи, которые в противоположность чертежу, сделанному для анализа и отражающему общие требования задачи, представляют собой отдельные частные случаи.

По своему содержанию вопрос о числе решений конструктивной задачи и условий ее разрешимости часто сложнее, чем сама задача.

Двухэтапная схема

Анализ. Анализ включает в себя все аспекты, характерные для анализа четырехэтапной схемы решения конструктивной задачи, а также установление тех соотношений между данными элементами и такого их взаимного расположения, при которых задача имеет решение. Целесообразно рассмотреть способы решения задачи для каждого из принципиально различных соотношений между данными и искомыми элементами.

Синтез. В процессе синтеза (построения с доказательством) реализуется способ решения задачи, установленный в анализе, и обосновывается, что построенная фигура отвечает всем требованиям, изложенным в условии задачи.

Анализ и синтез (в двухэтапной схеме) являются двумя составными частями единого логического процесса. Когда вариантов анализа немного, их целесообразно рассмотреть все сразу и после этого перейти к соответствующим вариантам синтеза. Если же в анализе много вариантов, то каждый из них проще рассматривать непосредственно перед соответствующим вариантом синтеза.

Таким образом, при двухэтапной схеме решения конструктивной задачи в ней с самого начала выделяются существенно различные частные случаи, а потом для каждого из них отыскивается метод решения и устанавливается число решений.

Задача. Построить окружность, проходящую через данные точки A и B и касающуюся данной прямой t.*

Решим эту задачу по четырехэтапной схеме.

Анализ. Окружности, проходящие через точки A и B, образуют множество окружностей, центры которых находятся на прямой — оси симметрии для точек A и B. В задаче требуется выбрать из этого множества окружностей ту, которая касается прямой t. Предположим, что задача решена и искомая окружность построена (рис. 55). Точку ее касания с прямой t обозначим буквой T. Проведем секущую AB. Точку пересечения прямых t и (AB) обозначим буквой C. Тогда $|CA| \cdot |CB| = |CT|^2$. Таким образом, отрезок $[CT]$ может быть построен.

---

* Различные решения этой задачи взяты из книги Н. Ф. Четверухина «Методы геометрических построений» (М., 1952) и статьи М. Я. Выгодского и В. Л. Рабиновича «Некоторые принципиальные вопросы, связанные с решением конструктивных задач». («Математика в школе», 1965, № 4.)

Построение. Для построения отрезка $[CT]$ воспользуемся свойством радикальной оси — прямой, перпендикулярной к линии центров данных окружностей, — которая является множеством точек плоскости, имеющих одну и ту же степень относительно этих окружностей. Строим произвольную окружность O', проходящую через точки A и B. Тогда прямая (AB) является радикальной осью окружностей O и O'. Поэтому степень точки C отиосительно обеих окружностей одинакова, и отрезок касательной CT к окружности O

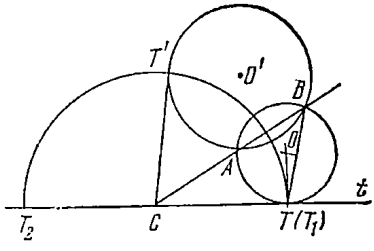


Рис. 55

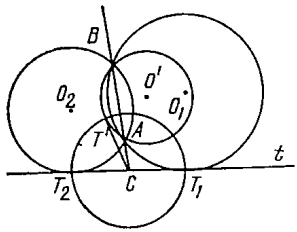


Рис. 56

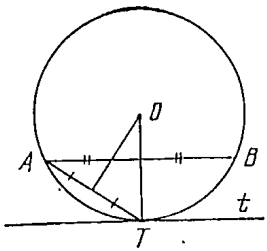


Рис. 57

равен отрезку $[CT']$ касательной к окружности O'. Проводим касательную CT' и из точки C описываем окружность радиусом CT'. Точки пересечения ее с прямой t обозначим буквами T_1 и T_2. Искомая окружность определяется точками A, B и T_1 или A, B и T_2. Ее нетрудно построить (рис. 56).

Доказательство. Обе построенные окружности $A\ B\ T_1$ и $A\ B\ T_2$ принадлежат множеству окружностей, проходящих через точки A и B. Окружность $T_2\ T'\ T_1$ (рис. 56) ортогональна к ним, поэтому прямые (CT_1) и (CT_2) должны касаться соответствующих окружностей. Следовательно, построенные окружности удовлетворяют условиям задачи.

Исследование. Вопрос о существовании решений и о числе их зависит от расположения данных точек A и B и прямой t.

Если точки A и B расположены по одну сторону от прямой, причем $(AB) \nparallel t$, то задача имеет два решения, как на рис. 56. Если $(AB) \parallel t$, то только одно решение (рис. 57), которое находится следующим образом (общий способ в этом случае неприменим, так как прямые (AB) и t не пересекаются). Прямая (OT), перпендикулярная к отрезку $[AB]$ и проходящая через его середину, определяет точку касания T. Затем строится центр окружности O.

Если одна из точек A и B лежит на прямой t, то задача формулируется так: построить окружность, проходящую через данную точку A и касающуюся данной прямой t в данной точке B. В этом случае задача имеет единственное решение.

Если обе точки A и B лежат на прямой t, то задача, очевидно, не имеет решения.

Наконец, если точки A и B лежат по разные стороны от прямой t, то, как нетрудно видеть, задача также не имеет решения. В самом деле, в этом случае всякая окружность, проходящая через A и B, пересекает прямую t (рис. 58), которая, следовательно, не может быть касательной, как это требуется в условии задачи.

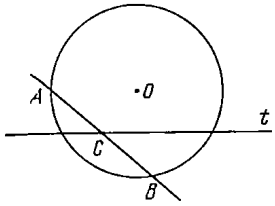


Рис. 58

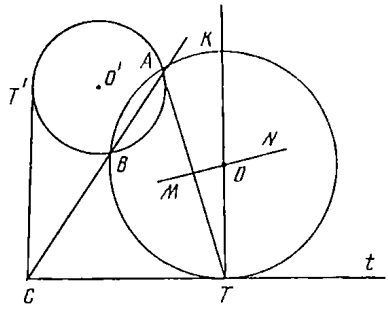


Рис. 59

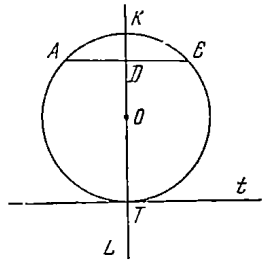


Рис. 60

Теперь решим эту задачу по двухэтапной схеме.

Анализ. 1. Предположим, что искомая окружность существует. Пусть T (рис. 59) — точка касания. Из двух точек A и B по меньшей мере одна не совпадает с T (и, следовательно, не лежит на касательной t). Присвоим ей обозначение A. Центр O искомой окружности лежит на перпендикуляре (MN) к отрезку $[AT]$, проведенном через его середину, а также на прямой (TK), перпендикулярной к прямой t. Следовательно, задача будет решена, если мы найдем точку T.

2. Точка B может лежать на прямой t. Тогда точка T совпадает с B.

3. В общем случае, когда точка B не лежит на прямой t, она расположена по ту же сторону от нее, что и точка A (так как окружность O лежит по одну сторону от касательной t).

4. Предположим, что прямые (AB) и t не параллельны, и обозначим через C точку их пересечения. По известной теореме $|CT|^2 = |CA| \cdot |CB|$. Следовательно, точку T можно построить.

5. Если прямые (AB) и t параллельны (рис. 60), то точка T лежит на перпендикуляре (KL) к отрезку $[AB]$, проведенном через его середину D. Следовательно, точку T можно построить.

Синтез. Из предшествующего анализа вытекает, что все решения задачи можно найти следующим образом.

1. Когда одна из точек A, B (например, B) лежит на прямой t, искомая точка T совпадает с B.

В дальнейшем будем предполагать, что обе точки A, B не лежат на прямой t и, следовательно, расположены по одну сторону от нее.

2. Когда прямые (AB) и t параллельны, проводим перпендикуляр (KL) (рис. 60) к отрезку $[AB]$ через его середину. Искомая точка T лежит на пересечении прямых (KL) и t.

3. Когда прямые (AB) и t пересекаются в некоторой точке C, находим средний пропорциональный $[CT']$ (рис. 59) между отрезками $[CB]$ и $[CA]$. Для этого достаточно провести через A и B произвольную окружность O' и к ней из точки C касательную CT'. Затем строим окружность радиуса CT' с центром C. Искомая точка C лежит на пересечении этой окружности с прямой t.

4. Построив точку T, проведем прямую (TK), перпендикулярную к прямой t, а также перпендикуляр (MN) к отрезку $[AT]$ через его середину. Из точки O, в которой эти прямые пересекаются, проводим, как из центра, окружность радиуса OT. Эта окружность является искомой. Докажем это для случая 3.

Заметим, что прямые t и (TK) по построению перпендикулярны. Следовательно, окружность O касается прямой t. Далее, по построению $|OT| = |OA|$. Следовательно, окружность O проходит через точку A. Остается доказать, что она проходит также через точку B. Для этого достаточно доказать, что точка B совпадает со второй общей точкой окружности O и прямой (AC). Обозначим эту вторую точку пересечения буквой B' (пока мы еще допускаем, что точка B' может и не совпадать с B). Так как прямая (CT) — касательная к окружности O, а прямая (CA) — секущая, то $|CT|^2 = |CA| \cdot |CB'|$. Но по построению $|CT|^2 = |CA| \cdot |CB|$. Из сопоставления этих двух равенств следует, что $|CB'| = |CB|$. А так как обе точки B и B' лежат по ту же сторону от прямой t, что и точка A, то они расположены по одну сторону от точки C. Поэтому из равенства $|CB'| = |CB|$ следует, что точки B и B' совпадают.

Таким образом, окружность O удовлетворяет всем условиям задачи.

Для случаев 1 и 2 доказательство проводится без труда.

§ 2. Поиски путей решения задачи

Исследовательский подход к решению геометрических задач

Цель этого параграфа — раскрыть роль и место задач с функциональным содержанием в курсе геометрии средней школы, сформулировать основные принципы методики обучения учащихся их решению. Это будет сделано путем анализа конкретных задач.

Понятие функции является одним из наиболее важных в современной математике. Это положение нашло отражение и в новых

школьных программах. В частности, геометрическим преобразованиям, как специфическим функциям, отводятся особое место и роль в школьном курсе геометрии. Этим самым расширяются функциональные представления учащихся, получаемые ими на уроках арифметики и алгебры.

Развитию функциональных представлений учащихся способствует и решение задач, содержанием которых является установление правила (закона), по которому изменяется форма фигуры (взаимное расположение ее элементов) с изменением величины некоторых ее элементов и наоборот.

Приведем пример такой задачи (для повторения школьного курса планиметрии).

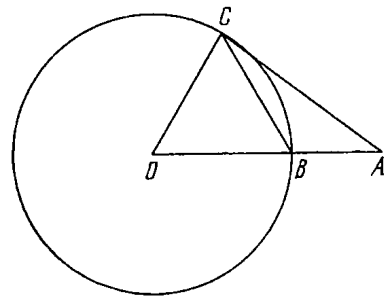


Рис. 61

Задача 1. На плоскости даны окружность O (50 мм) и точка A ($|OA| = 50\sqrt{3}$ мм). Угол BOC равен 60°, $B \in [OA]$ (рис. 61). Хорда BC вращается вокруг точки O (в плоскости чертежа) против хода часовой стрелки.

1. Будет ли при этом изменяться мера угла CAB?
2. Указать на окружности те положения точки B, при которых $\angle CAB$ становится наименьшим и наибольшим.
3. Отметить те дуги окружности, при движении по которым $\angle CAB$ уменьшается или увеличивается.
4. Сколько существует таких положений точки B на окружности, при которых величина $\angle CAB$ равна: 0°, 15°, 20°, 30°, 45°, 60°, 90°?

Содержание этой задачи составляет изучение того, как изменяется мера (величина) угла CAB с изменением положения хорды BC на данной окружности.

Традиционно все школьные геометрические задачи делятся на задачи на вычисление, доказательство и построение. Очевидно, сформулированная задача не относится ни к одному из этих видов, так как при ее решении приходится заниматься не только построением, вычислением и доказательством, но и обнаружением и обоснованием закона измененения $\hat{CAB}$.

Итак, вернемся к первому вопросу примера 1. Каким образом может ученик получить ответ на этот вопрос? Если задача решается в классе, то динамическая демонстрационная модель была бы лучшим средством получения первого предположения о характере изменения $\hat{CAB}$ при вращении хорды BC около точки O. Но кон-

струирование динамических моделей дело сложное. Поэтому скорее всего ученик получит первое представление об изменении $B\hat{A}C$ в результате выполнения с помощью инструментов аккуратных построений различных положений хорды BC на окружности и измерения транспортиром $B\hat{A}C$. Для ускорения работы учитель может разделить класс на группы. Каждая группа учащихся выполняет соответствующие построения и измерения (транспортиром) для указанных ей учителем положений точки B на окружности. Например, всю окружность точками $B_1 = B$, B_2, B_3, ..., B_{24} можно разделить на 24 конгруэнтные части. Каждая группа учащихся выполняет построения двух-трех положений хорды BC и находит для этих положений хорды приближенное значение $B\hat{A}C$.

Различные положения хорды BC показаны на рис. 61 и 62. Результаты коллективной работы вносятся в изображенную на доске таблицу (табл. 1). По таблице строится график (рис. 63).

Какие гипотезы могут выдвинуть ученики, рассматривая полученную таблицу (график)?

1) С увеличением $B\hat{O}A$ от 30° до 150° $B\hat{A}C$ увеличивается от 0° до 23° (приближенное значение);

2) с увеличением $B\hat{O}A$ от 150° до 270° $B\hat{A}C$ уменьшается от 23° (приближенное значение) до 0°;

3) с увеличением $B\hat{O}A$ от 270° до 330° $B\hat{A}C$ увеличивается от 0° до 60°;

4) с увеличением $B\hat{O}A$ от 330° до 360° $B\hat{A}C$ уменьшается с 60° до 35° (приближенное значение);

5) с увеличением $B\hat{O}A$ от 0° до 30° $B\hat{A}C$ уменьшается от 35° (приближенное значение) до 0°;

6) угол BAC наименьший, если $B\hat{O}A = 30°$ или $B\hat{O}A = 270°$;

7) угол BAC наибольший (равен 60°), если $B\hat{O}A = 330°$;

8) существуют четыре экстремальные точки ($x = 30°$, 150°, 270°, 330°);

9) существует по два положения точки B, при которых $B\hat{A}C$ равна 0°, 30°, 45°;

10) существует четыре положения точки B, при которых $B\hat{A}C = 15°$, 20°;

11) существует одно положение B, при котором $B\hat{A}C = 60°$;

Таблица 1

	$x = \overset{\wedge}{BOA}$, град	$y = \overset{\wedge}{BAC}$, град
B_1	0	35
B_2	15	14
B_3	30	0
B_4	45	8
B_5	60	14
B_6	75	16
B_7	90	19
B_8	105	20
B_9	120	21
B_{10}	135	22
B_{11}	150	23
B_{12}	165	22
B_{13}	180	21
B_{14}	195	20
B_{15}	210	19
B_{16}	225	17
B_{17}	240	14
B_{18}	255	8
B_{19}	270	0
B_{20}	285	13
B_{21}	300	36
B_{22}	315	55
B_{23}	330	60
B_{24}	345	54
B_{25}	360	35

12) не существует такого положения B, при котором $\overset{\wedge}{BAC} = 90°$.

Этим заканчивается первый этап работы над задачей (получение правдоподобных гипотез).

Но, подчеркиваем еще раз, все двенадцать сформулированных положений являются пока только гипотезами, полученными самими учениками на основании фактических построений и измерений. Эти утверждения им предстоит доказать или отвергнуть. Не каждое из них сумеют обосновать все ученики восьмого класса без предварительной подготовки.

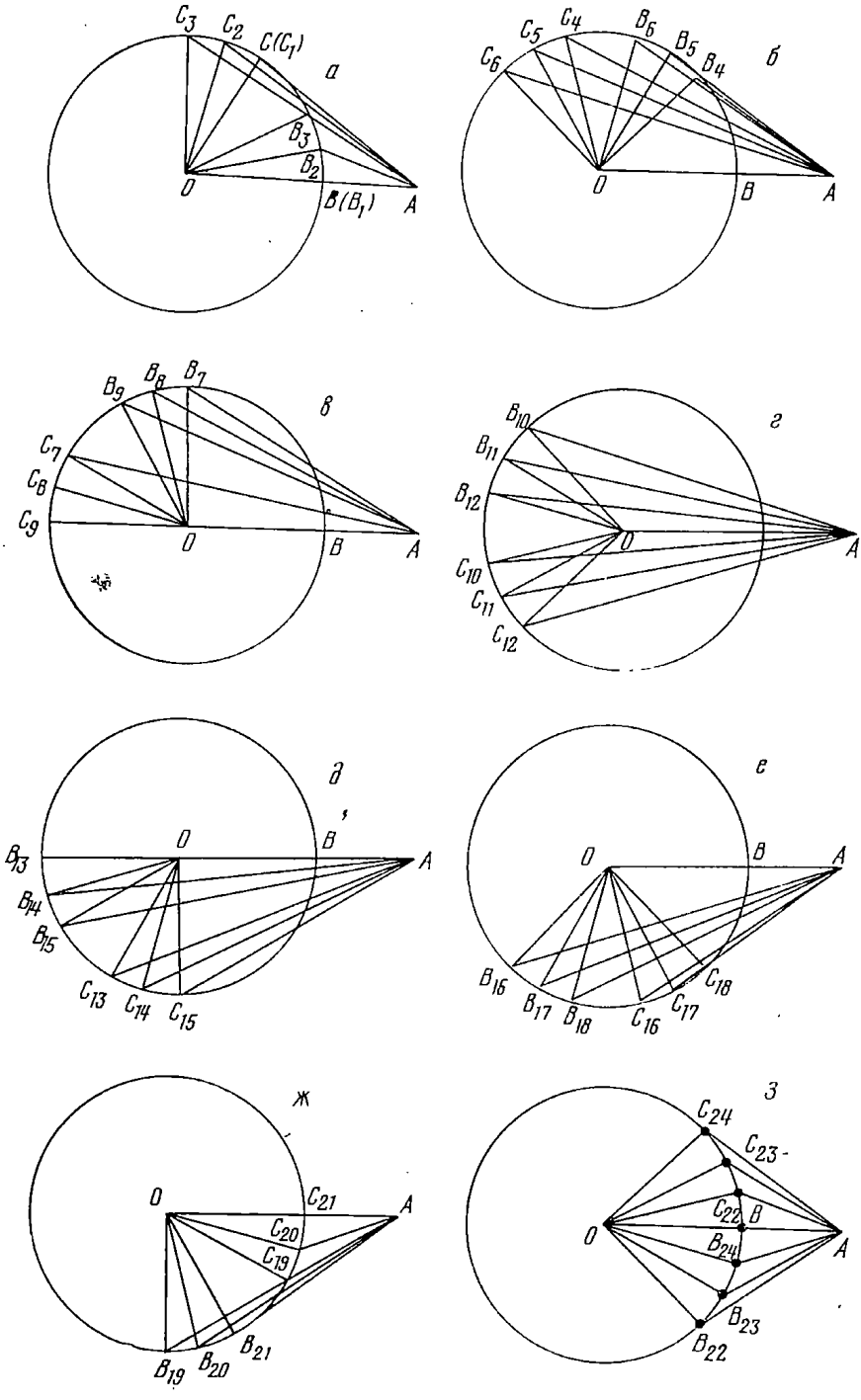


Рис. 62

В качестве подготовительных упражнений к этой задаче следует рассмотреть следующие вопросы.

1. Точка X находится внутри треугольника ABC (рис. 64). Доказать, что $\hat{AXC} > \hat{ABC}$.

2. Установить, при каком положении точки X, внутри треугольника ABC или на его границе, величина $\hat{AXC}$ будет наименьшей.

3. Как измеряется угол, вписанный в окружность?

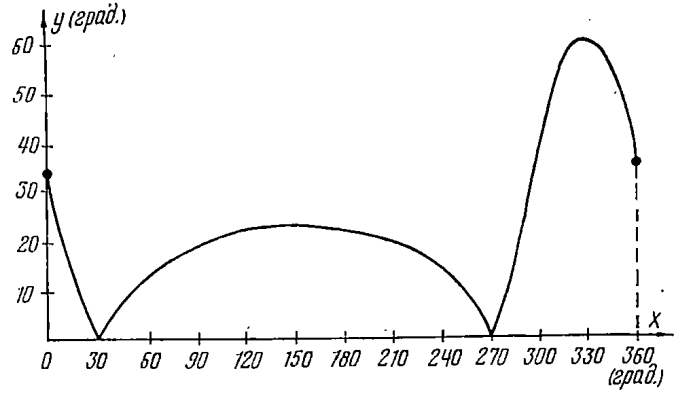


Рис. 63

4. Как измеряется угол, вершина которого находится вне окружности?

5. Хорды AB и A_1B_1 окружности, изображенной на рис. 65, равны между собой. Построены $[BH] \perp (AC)$ и $[B_1H_1] \perp (A_1C)$. Доказать, что $\hat{BAC} < \hat{B_1A_1C}$. Доказать, что $|BH| < |B_1H_1|$. Который из отрезков короче: $[BC]$ или $[B_1C_1]$? Который из углов больше: $\angle HCB$ или $\angle H_1CB_1$?

6. Сравнить $\hat{B_1AB_2}$ и $\hat{B_2AB_3}$ (рис. 62, *а*).

7. Дуги окружности P_1K_1 и K_1M_1 конгруэнтны (рис. 66). Сравнить дуги MK и KP.

8. Дуги MK и KP конгруэнтны (рис. 67). Сравнить дуги P_1K_1 и K_1M_1.

9. Сравнить $\hat{MDK}$ и $\hat{KDP}$ (рис. 67).

После рассмотрения этих подготовительных упражнений можно приступать к доказательству утверждений (1) — (12).

В чем ценность рассмотренной задачи 1?

Во-первых, в процессе ее решения школьники повторили много важных свойств геометрических фигур, убедились, что для реше-

ния серьезной геометрической задачи нужно использовать в комплексе знания, полученные не только на уроках геометрии, но и алгебры.

Во-вторых, они увидели, что исследовательский подход дает возможность объединить единой идеей такие математические факты, которые с другой точки зрения кажутся разнородными.

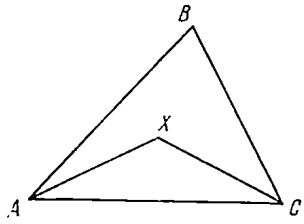


Рис. 64

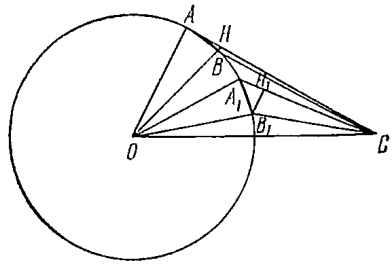


Рис. 65

В-третьих, и это, пожалуй, самое главное, ученики приобрели навыки открытия математической гипотезы, которые являются существенным моментом всякой математической деятельности.

Рассмотренная задача достаточно сложна для восьмиклассников,

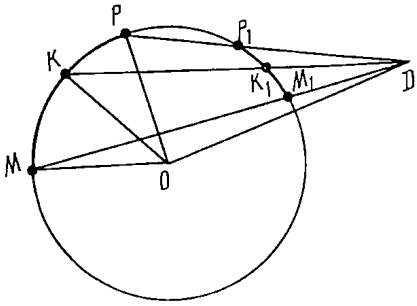


Рис. 66

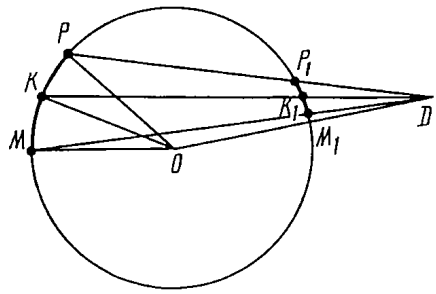


Рис. 67

поэтому при ее решении не обойтись без подготовительных упражнений.

Задача 2. Сколько существует вписанных в окружность четырехугольников $ABCD$, у которых $|AB| = 50$ мм, $|BC| = 20$ мм, $|CD| = 25$ мм, $|DA| = 35$ мм?

Рассмотрим два способа решения этой задачи.

Способ 1. Если четырехугольник $ABCD$ с данными сторонами

должен вписываться в окружность, то $\hat{ABC} + \hat{ADC} = 180°$. Чтобы использовать это равенство, приложим $\triangle ABC$ к $\triangle ACD$ так, чтобы $\angle ABC$ и $\angle ADC$ были смежными. На рис. 68 $\triangle ABC$ занял положение $\triangle A'B'C'$.

Через A проводим прямую, параллельную $(A'C')$. В пересечении с прямой $(C'C)$ получаем точку C''.

Треугольник $AC''C$ можно построить. В самом деле, $|CD| = 25$ мм, $|C''B| = |C'D| \cdot |AD| : |AB| = 20 \cdot 35 : 50 = 14$ мм (из подобных треугольников ABC'' и $A'BC'$); $|AD| = 35$ мм; $|AC| : |AC''| = 50 : 35 = 10 : 7$.

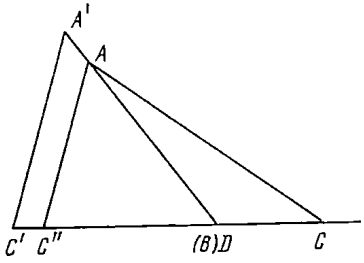


Рис. 68

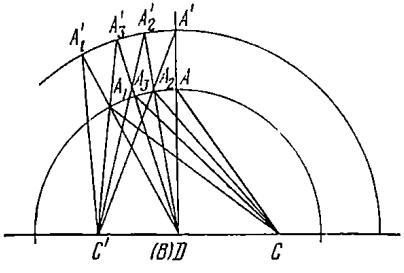


Рис. 69

Искомая вершина A треугольника $C''AC$ находится на окружности (множество точек, расстояния которых до двух данных точек C и C'' находится в данном отношении $10 : 7$, есть окружность определенного радиуса и центра). Ее положение на этой окружности определяется отрезком $[DA]$, длина которого равна 35 мм.

Построив $\triangle C''AC$, определяем сторону AC, т. е. диагональ искомого четырехугольника $ABCD$. Теперь построение единственного четырехугольника $ABCD$ очевидно.

Способ 2. Функциональный подход намного упрощает поиски решения задачи.

На одной прямой отложим отрезки $[C'B]$ и $[DC]$, длины которых соответственно равны 20 и 25 мм (точки B и D совпадают). Проведем концентрические окружности D (35 мм) и D (50 мм) (рис. 69). Точки A и A' находятся на этих окружностях и принадлежат прямой (DA). Задача будет решена, если мы установим, сколько существует таких точек A на окружности D (50 мм), что $|C'A'| = |AC|$.

Построим $[BA'] \perp [C'C]$. Очевидно, что $|C'A'| > |AC|$.

При движении точки A' против хода часовой стрелки отрезок $[A'C']$ уменьшается, а соответствующий ему отрезок $[AC]$ увеличивается. Отрезок $[A'C']$ достигнет своей наименьшей длины, если окажется на прямой $(C'C)$.

Итак, наименьшая длина отрезка $[A'C']$ равна $50 - 20 = 30$ (мм).

Когда точка A окажется на прямой $(C'C)$, $|AC|$ станет равной $25 + 35 = 60$ (мм).

Теперь ясно, что на окружности D (50 мм) существует единственная точка A' такая, что $|A'C'| = |AC|$.*

Сравним две задачи.

Задача 3. Существует ли $\triangle ABC$, у которого $|AC| = 50$ мм, $|AB| = 40$ мм и разность мер углов $\varphi = \hat{B} - \hat{C} = 30°$.

Задача 4. Существует ли $\triangle ABC$, у которого $|BC| = 40$ мм, $|AB| = 50$ мм и разность мер углов $\varphi = \hat{B} - \hat{C} = 30°$.

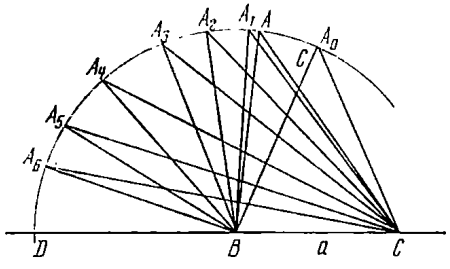


Рис. 70

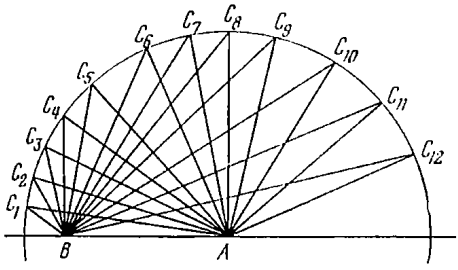


Рис. 71

Ответ на вопрос задачи 3 может быть получен построением указанного $\triangle ABC$ (методом осевой симметрии). Задача 4 выше второй степени и поэтому не может быть решена только с помощью циркуля и линейки, хотя по внешнему виду похожа на задачу 3.

Выясним функциональное содержание этих задач.

Сначала о задаче 4.

Построим равнобедренный треугольник A_0BC, у которого $|BC| = 40$ мм, $|BA_0| = |A_0C| = 50$ мм (рис. 70). Этот треугольник не полностью удовлетворяет условию задачи. У него $\varphi = \hat{B} - \hat{C} = 0°$. Очевидно, у искомого треугольника ABC угол B больше угла C. Поэтому вершина A искомого треугольника ABC лежит на дуге DA_0 окружности B левее точки A_0. Более того, ученикам сразу видно, что при движении точки A_0 по дуге A_0D (против хода часовой стрелки) $\hat{C}$ уменьшается от $\hat{BCA}_0$ до 0°, а $\hat{B}$ увеличивается от $\hat{A_0BC}$ до 180°. Поэтому при таком движении точки A_0 угол φ увеличи-

* Здесь и в ряде других мест используются некоторые важные свойства непрерывных монотоиных функций. Строгого доказательства этих свойств в школе не дается, однако при помощи графиков функций эти свойства осознаются учениками достаточно хорошо.

вается от 0° до 180°. Итак, задача имеет решение при любом допустимом значении угла φ. Причем это решение единственное.

Теперь о задаче 3.

Построим сторону BA треугольника ABC (рис. 71). Тогда третья вершина C этого треугольника лежит где-то на полуокружности A (50 мм). При увеличении угла A от 0° до 180° угол B, очевидно, уменьшается от 180° до 0°. Но неясно, как изменяется при этом $\hat{C}$, а следовательно, и разность $\hat{B} - \hat{C}$.

Для получения гипотезы отметим на полуокружности несколько точек (на рис. 71 — точки C_1, C_2, ..., C_{11}, C_{12}). Измерим углы C_n ($n = 1, 2, \ldots, 12$) и $\angle B$ треугольников C_1AB, C_2AB, ..., $C_{12}AB$. Результаты измерений внесем в таблицу (табл. 2).

Таблица 2

Углы \ Точки	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	C_8	C_9	C_{10}	C_{11}	C_{12}
$\hat{C}$	28	45	52	54	53	48	43	39	34	26	19	11
$\hat{B}$	145	109	102	90	79	66	58	51	43	32	22	13
$\hat{B} - \hat{C}$	117	64	50	36	26	18	15	12	9	6	3	2

В табл. 2 величины углов указаны в градусах.

Эта таблица наводит нас на мысль, что при увеличении угла $\hat{A}$ от 0° до 180° разность $\hat{B} - \hat{C}$ уменьшается от 180° до 0°.

Но доказать это достаточно трудно, так как $\angle C$ опирается на отрезок $[BA]$, который не является хордой окружности, которой принадлежит точка C.

С другой стороны, таблица нам подсказывает, что $\hat{C}$ принимает наибольшее значение в том случае, когда $\hat{B} = 90°$.

Поэтому обратимся к другому чертежу. Построим отрезок $[AC]$. На нем, как на диаметре, построим полуокружность (рис. 72). Третья вершина B искомого треугольника ABC принадлежит окружности A (40 мм).

Теперь, кажется, будет проще доказать ту гипотезу, которая нам подсказана таблицей.

В самом деле, при движении точки B по дуге от P до B_0 углы

$\hat{A}$ и $\hat{C}$ увеличиваются, а следовательно, $A\hat{B}C$ уменьшается. Поэтому разность $\hat{B} - \hat{C}$ уменьшается.

При движении точки B по окружности A (40 мм) влево от B_0 $\hat{C}$ уменьшается. Но как изменяется $\hat{B}$ и разность $\hat{B} - \hat{C}$?

Пусть $B_1 \in A$ (40 мм) и B_1 находится вне прямоугольного треугольника AB_0C. Обозначим: $B_1\hat{A}B_0 = \alpha$. Тогда $B_1\hat{C}B < \frac{\alpha}{2}$, так как его вершина находится вне круга A (40 мм) и он опирается на дугу B_1B_0.

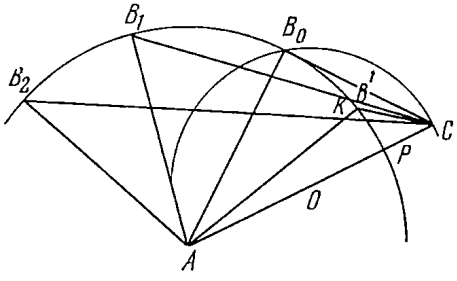


Рис. 72

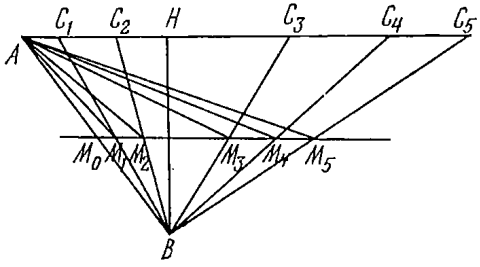


Рис. 73

Таким образом, с увеличением $\hat{A}$ треугольника ABC на α $\hat{C}$ уменьшается меньше, чем на $\frac{\alpha}{2}$. Поэтому $\hat{B}$ уменьшается больше, чем на $\frac{\alpha}{2}$. Следовательно, при движении точки B по окружности A (40 мм) влево от B_0 разность $\hat{B} - \hat{C}$ также уменьшается.

Теперь ясно, что существует единственный треугольник ABC, у которого $|AC| = 50$ мм, $|AB| = 40$ мм (при любом допустимом значении φ).

Задача 5. Построить треугольник ABC, у которого $|AB| = 50$ мм, $|AM| = 60$ мм и $|BH| = 40$ мм ($[AM]$ — медиана этого треугольника, $[BH]$ — его высота).

Сделав соответствующий чертеж для анализа задачи, ученики замечают, что можно построить часть искомого треугольника — прямоугольный треугольник AHB (по гипотенузе $[AB]$ и катету $[BH]$). Третья вершина C искомого треугольника ABC принадлежит лучу $[AH)$.

Учащимся предлагается отметить несколько точек (C_1, C_2, ...)

на луче $[AH)$, соединить их отрезками с точкой B, построить середины M_1, M_2, ... этих отрезков, соединить точки M_1, M_2, ... с точкой A (рис. 73).

Измерив отрезки $[AM_1]$, $[AM_2]$, ..., школьники приходят к предположению, что при движении точки C по лучу $[AH)$ (от начала луча) длина медианы $[AM]$ $\triangle ABC$ увеличивается от 25 мм (половина стороны AB) до бесконечности.

Чтобы облегчить поиски доказательства этого факта, обращаем их внимание на свойство точек M_1, M_2, ... При помощи линейки они обнаруживают, что эти точки принадлежат одной прямой, параллельной лучу $[AH)$.

Теперь дальнейшая работа над задачей не представляет серьезных трудностей.

Функциональный подход к решению этой задачи дал возможность ученикам обнаружить свойство точек M_1, M_2, ... и закон изменения длины отрезков $[AM_1]$, $[AM_2]$, ... Кроме того, они увидели теперь, как решается эта задача при помощи циркуля и линейки.

Искомая точка $M = A$ (60 мм) $\cap m$, где m — прямая, параллельная лучу $[AH)$ и проходящая через середину отрезка $[HB]$.

Задача 6. Установить, каким свойством обладает множество X точек плоскости, расстояния которых до двух данных точек A и B находятся в отношении 5:3 ($|AB| = 40$ мм).

Построим отрезок $[AB]$ (рис. 74) и несколько точек x_0, x_1, x_1', x_2, x_2', x_3, x_3', ..., удовлетворяющих условию задачи, т. е. таких, что $|AX| : |BX| = 5 : 3$.

После этого нетрудно заметить, что все эти точки принадлежат окружности, центр O которой находится на прямой (AB). При помощи масштабной линейки приходим к предположению, что диаметр этой окружности равен 7,5 см. Теперь остается только доказать или опровергнуть полученную гипотезу о свойстве точек множества X.

Пусть M — произвольная точка этой окружности. Обозначим $\hat{MOA} = \alpha$. Если $|OM| = 7{,}5 : 2 = 3{,}75$ (см), то, очевидно, $|OB| = 2{,}25$ см и $|OA| = 6{,}25$ см.

Применив к треугольникам BOM и AOM теорему косинусов, получаем:

$$|BM|^2 = 2{,}25^2 + 3{,}75^2 \mp 2 \cdot 2{,}25 \cdot 3{,}75 \cos\alpha = 9\,(2{,}125 \mp 1{,}875\cos\alpha).$$

$$|AM|^2 = 6{,}25^2 + 3{,}75^2 \mp 2 \cdot 6{,}25 \cdot 3{,}75 \cos\alpha = 25\,(2{,}125 \mp 1{,}875\cos\alpha)$$

(знак «+» или «—» ставим в зависимости от того, является ли угол α острым или тупым).

Теперь ясно, что $|BM|^2 : |AM|^2 = 9 : 25$, т. е. $|BM| : |AM| = 3 : 5$.

Таким образом, доказано, что «открытая» нами в результате

фактических построений и измерений гипотеза о множестве X верна, т. е. множество X является окружностью радиуса 3,75 см. Центр O ее принадлежит прямой (AB) (правее точки B, вне отрезка $[AB]$); $|BO| = 2{,}25$ см.

Задача 7. Внутри квадрата $ABCD$ взята произвольная точка P. Из вершины A опущен перпендикуляр $[AK]$ на прямую (BP), из вершины B — перпендикуляр $[BM]$ на прямую (CP), из C — перпендикуляр $[CH]$ на прямую (DP), из D — перпендикуляр $[DT]$ на прямую (AP). Доказать, что все четыре перпендикуляра (или их продолжения) пересекаются в одной точке X.

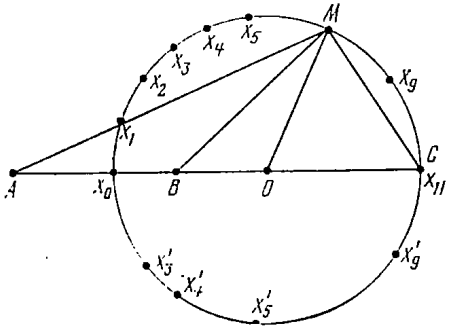


Рис. 74

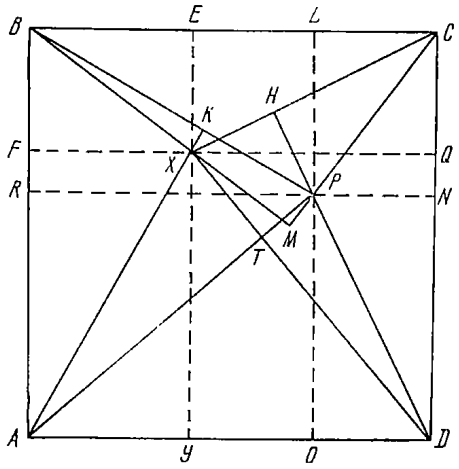


Рис. 75

Построим произвольный квадрат $ABCD$ (рис. 75). Построим перпендикуляры $[AK]$, $[BM]$, $[CH]$ и $[DT]$, о которых говорится в задаче. Аккуратный чертеж подтверждает утверждение задачи. Через P и X проводим прямые, параллельные сторонам квадрата. Получим отрезки $[PL]$, $[PO]$, $[PR]$, $[PN]$, $[FX]$, $[XQ]$, $[XY]$, $[XE]$. Измерив эти отрезки масштабной линейкой, получаем гипотезу:

$$|FX| = |LP| \text{ и } |BL| = |AF|;\ |BE| = |LP| \text{ и } |LC| = |EX|;$$

$$|EX| = |PN| \text{ и } |DN| = |EC|;\ |YD| = |AR| \text{ и } |PR| = |YX|.$$

Если это так, то конгруэнтны прямоугольные треугольники:

$\triangle BLP$ и $\triangle AFX$, $\triangle BEX$ и $\triangle PLC$, $\triangle XEC$ и $\triangle PND$, $\triangle ARP$ и $\triangle DYX$.

Итак, в результате аккуратно выполненных фактических построений и измерений мы пришли к предположению, что точка X обладает следующими свойствами:

$$|XY| = |PR|,\ |XQ| = |PO|.$$

Поэтому данную задачу можно заменить такой:

доказать, что если $|XY| = |PR|$ и $|XQ| = |PO|$, то прямые $(AX) \perp (BP)$, $(BX) \perp (CP)$, $(CX) \perp (PD)$, $(DX) \perp (AP)$.

Это свойство точки X очевидно. Например, $(AX) \perp (BP)$, так как из конгруэнтности прямоугольных треугольников BLP и AFX следует конгруэнтность острых углов LBP и FAX. Но стороны $[BL)$ и $[AF)$ этих углов перпендикулярны. Поэтому перпендикулярны и стороны $[BP)$ и $[AX)$.

Задача 8. Расстояние между центрами M и K двух окружностей равно $0{,}5(1 + 3\sqrt{3})$. Радиусы их равны 1 и $0{,}5\sqrt{6}$. Определить сторону квадрата $ABCD$, вершины A и B которого лежат на одной окружности, а C и D — на другой.

Выбрав некоторый масштаб, строим данные окружности (рис. 76). Допустим, что искомый квадрат $ABCD$ построен; $|MA| = 1$, $|KD| = 0{,}5\sqrt{6}$. Точка $P = (AB) \cap (MK)$, $E = (CD) \cap (MK)$. Обозначим: $|AD| = x$, $|MP| = y$.

Тогда

$$y^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 = 1, \quad [0{,}5(1 + 3\sqrt{3}) - x - y]^2 + 0{,}25x^2 = \left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2.$$

Исключив из этих двух уравнений y, получим уравнение четвертой степени:

$$0{,}25 + [-0{,}5(1 + 3\sqrt{3}) + x]^4 + x^2[-0{,}5(1 + 3\sqrt{3}) + x]^2 - \\ - 3[-0{,}5(1 + 3\sqrt{3}) + x]^2 = 0. \qquad (1)$$

Вычисление его действительных корней представляет серьезные трудности. Поэтому поступим следующим образом.

Из рис. 76 видно, что сторона искомого квадрата не превышает диаметра A_0B_0 меньшей окружности. Очевидно, у прямоугольника $A_0B_0C_0D_0$ $|A_0D_0| > |A_0B_0|$. При увеличении y от 0 до 1 длина стороны $[A_0B_0]$ прямоугольника $A_0B_0C_0D_0$ уменьшается монотонно от 2 до 0; $|A_0D_0| = x$ также монотонно уменьшается от $|A_0D_0|$ до $|HM|$ (H и M — точки пересечения окружностей с отрезком $[MK]$). Отсюда ясно, что на отрезке $[MH]$ существует не больше двух таких точек P, при которых прямоугольник $A_0B_0C_0D_0$ становится квадратом $ABCD$. Методом проб находим, что $x \approx 1{,}7 \approx \sqrt{3}$. Подстановкой в уравнение (1) убеждаемся, что $\sqrt{3}$ действительно является его корнем.

Но существует ли еще одно положительное решение этого уравнения?

Обозначим: $0{,}5(1 + 3\sqrt{3}) = k$.

Рассмотрим функцию

$$f(x) = 0{,}25 + (-k + x)^4 + x^2(-k + x)^2 - 3(-k + x)^2.$$

Ее производная

$$f'(x) = 2(x-k)[2(x-k)^2 - 3 + x(x-k) + x^2]$$

обращается в нуль только в точке $x = k$ (легко проверить, что квадратный трехчлен

$$2(x-k)^2 - 3 + x(x-k) + x^2$$

действительных корней не имеет).

Но $x = k > 3$. Длина стороны $[AD]$ прямоугольника $ABCD$ изменяется от $|A_0D_0|$ до $|HM|$. Причем $|HM| < |A_0D_0|$.

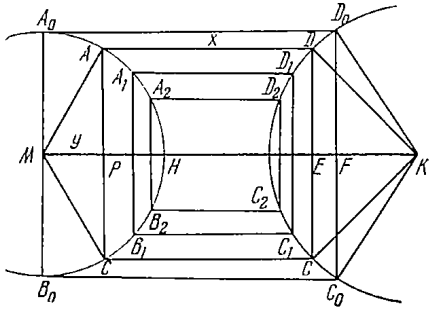


Рис. 76

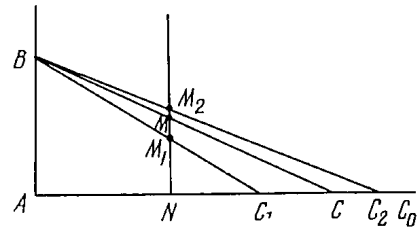


Рис. 77

Вычисляем

$$|A_0D_0| = |MF| = |MK| - |FK| = |MK| - \sqrt{|D_0K|^2 - |FD_0|^2} =$$
$$= |MK| - \sqrt{|D_0K|^2 - |MA_0|^2} =$$
$$= 0{,}5(1 + 3\sqrt{3}) - \sqrt{\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2 - 1} < 2{,}4 < 3.$$

Теперь ясно, что существует единственный квадрат $ABCD$, удовлетворяющий условию задачи. Длина его стороны равна $\sqrt{3}$.

Задача 9. На гипотенузе $[BC]$ прямоугольного треугольника ABC расположена точка M, а на стороне $[AC]$ — точка N такая, что $[MN] \parallel [AB]$. Известно, что $|AB| = |AN| = 1$, $|CM| = \sqrt{3}$. Определить длину отрезка $[MN]$ (рис. 77).

Естественно обозначить $|MN| = x$. Тогда $|CN| = \sqrt{3 - x^2}$. Из подобных треугольников MNC и BAC получаем уравнение

$$\frac{\sqrt{3 - x^2}}{1 + \sqrt{3 - x^2}} = x. \qquad (2)$$

Оно преобразуется к такому уравнению:

$$x^4 - 2x^3 - x^2 + 6x - 3 = 0. \qquad (2')$$

Найти точные значения действительных корней уравнения (2′) трудно. Поэтому поступим следующим образом.

Решим сначала данную задачу графически (методом проб). Для этого строим прямой $\angle BAC_0$ (рис. 77). На его сторонах строим точки B и N: $|AB| = |AN| = 1$. Через B проводим несколько лучей, пересекающих луч $[AC_0)$ в точках C_1, C_2, ... Очевидно, с удалением точки C_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ от A $|M_nC_n|$ монотонно увеличивается. Поэтому на луче $[AC_0)$ существует такая единственная точка C, что $|MC| = \sqrt{3}$. Методом проб находим приближенное положение такой точки C. Измерением находим, что $0{,}61 < x < 0{,}62$, т. е. $|NM| = x \approx 0{,}615$.

Уравнение (2′) четной степени. Поэтому оно имеет еще по крайней мере один действительный корень.

Строим графики функций:

1) $f(x) = x^4 - 2x^3$ и $\varphi(x) = x^2 - 6x + 3$ на $(-\infty, 0]$;
2) $f_1(x) = x^4 + 6x$ и $\varphi_1(x) = 2x^3 + x^2 + 3$ на $(0, +\infty)$.

После этого становится ясным, что на $(0, +\infty)$ уравнение имеет только один корень x_1 (мы его уже нашли: $x_1 \approx 0{,}615$). На $(-\infty, 0]$ уравнение (2′) имеет также один корень x_2:

$$-2 < x_2 < -1.$$

Уточнив значение корня методом проб, получаем $x_2 \approx -1{,}615$. Вычисляем

$$x_1 + x_2 \approx -1, \quad x_1 \cdot x_2 \approx -0{,}993.$$

Теперь можно высказать гипотезу:

$$x_1 + x_2 = -1, \tag{3}$$

$$x_1 \cdot x_2 = -1. \tag{4}$$

Решив систему уравнений (3) и (4), находим

$$x_1 = 0{,}5\,(\sqrt{5} - 1) \approx 0{,}615.$$

Нетрудно проверить, что число $0{,}5\,(\sqrt{5} - 1)$ является точным значением корня уравнения (2). Итак, $|MN| = 0{,}5\,(\sqrt{5} - 1)$.

Задача 10. На основании AC равнобедренного треугольника ABC расположена точка D так, что $|AD| = a$, $|CD| = b$ $(a > b)$. Окружности, вписанные в треугольники ABD и BCD, касаются прямой (BD) в точках M и K соответственно. Определить длину отрезка $[MK]$.

Обозначим: $\hat{BAC} = \hat{BCA} = 2\alpha$, $\hat{ADB} = 2\varphi$, $[PB]$ — высота этого треугольника (рис. 78). Центры H и E вписанных окружностей лежат на пересечении биссектрис углов треугольников ABD и BCD. Очевидно, $[HM] \perp [BD]$ и $[EK] \perp [BD]$, $[DH] \perp [DE]$; $\hat{EDC} = 90° - \varphi$.

Построим $[HM_0] \perp [AD]$ и $[EK_0] \perp [DC]$. Очевидно, $|MK| = |DM| - |DK| = |DM_0| - |DK_0|$.

Построим еще один треугольник ABC, отвечающий условиям задачи (рис. 79). Измерив масштабной линейкой отрезки $[M_0D]$, $[DK_0]$ (на обоих чертежах) и сравнив их с длинами отрезков $[AD]$ и $[DC]$, приходим к предположению, что $|MK| = |DM_0| - |DK_0| = 0{,}5\ (a - b)$.

Теперь задачу на вычисление можно свести к задаче на доказательство. Итак, попытаемся доказать, что при любом значении угла α $|MK| = 0{,}5\,(a - b)$.

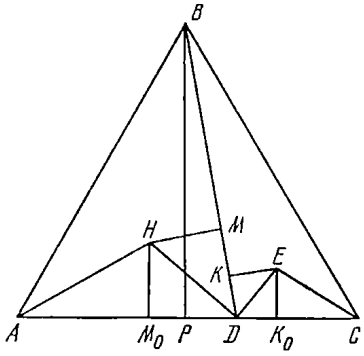


Рис. 78

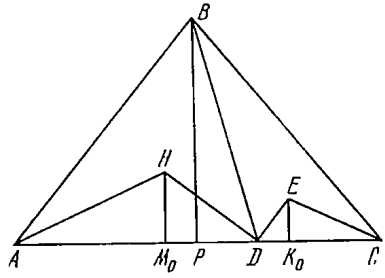


Рис. 79

Во-первых, установим, как связаны между собой α, φ, a, b. Из прямоугольных треугольников APB и PBD получаем:

$$|AP| = 0{,}5\,(a + b);\ |PD| = |AD| - |AP| = 0{,}5\,(a - b);\ |PB| = |AP| \operatorname{tg} 2\alpha =$$

$$= 0{,}5\,(a + b) \operatorname{tg} 2\alpha;\ \operatorname{tg} 2\varphi = |PB| : |PD| = \frac{a + b}{a - b} \operatorname{tg} 2\alpha.$$

По теореме синусов из треугольника AHD находим

$$\frac{|AD|}{\sin(180^\circ - \alpha - \varphi)} = \frac{|HD|}{\sin \alpha}.$$

Отсюда

$$|HD| = a \frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha + \varphi)}.$$

Из прямоугольного треугольника HM_0D

$$|M_0D| = |HD| \cos\varphi = a \frac{\sin\alpha \cos\varphi}{\sin(\alpha + \varphi)}.$$

Выполнив аналогичные преобразования, из треугольников DEC и EK_0C получаем

$$|DK_0| = b\frac{\sin\alpha\sin\varphi}{\cos(\alpha-\varphi)}.$$

Итак, нам нужно доказать, что

$$|MK| = a\frac{\sin\alpha\cos\varphi}{\sin(\alpha+\varphi)} - b\frac{\sin\alpha\sin\varphi}{\cos(\alpha-\varphi)} = \frac{a-b}{2}, \qquad (5)$$

если

$$\operatorname{tg}2\varphi = \frac{a+b}{a-b}\operatorname{tg}2\alpha \qquad (6)$$

$$(a > b,\ 0 < 2\varphi < 90^\circ,\ 0 < 2\alpha < 90^\circ).$$

Из равенства (6) находим

$$b = a\frac{\sin 2(\varphi-\alpha)}{\sin 2(\varphi+\alpha)}.$$

Подставив полученное значение b в равенство (5) и разделив обе части на a, получаем

$$\frac{\sin\alpha\cos\varphi}{\sin(\alpha+\varphi)} - \frac{\sin 2(\varphi-\alpha)\sin\alpha\sin\varphi}{\sin 2(\varphi+\alpha)\cos(\alpha-\varphi)} = \frac{1}{2} - \frac{\sin 2(\varphi-\alpha)}{2\sin 2(\varphi+\alpha)}. \qquad (7)$$

Таким образом, мы докажем, что $|MK| = 0{,}5(a-b)$, если покажем, что равенство (7) справедливо для всех α и φ, удовлетворяющих условиям:

$$0 < 2\varphi < 90^\circ,\ 0 < 2\alpha < 90^\circ. \qquad (8)$$

После очевидных преобразований равенство (7) принимает вид

$$\sin\alpha\left[\frac{\cos\varphi}{\sin(\alpha+\varphi)} - \frac{\sin(\varphi-\alpha)\sin\varphi}{\sin(\varphi+\alpha)\cos(\varphi+\alpha)}\right] = \frac{\sin 2(\varphi+\alpha) - \sin 2(\varphi-\alpha)}{4\sin(\varphi+\alpha)\cos(\varphi+\alpha)}$$

или, после умножения левой и правой части равенства на $\sin(\varphi+\alpha) \neq 0$:

$$\sin\alpha\left[\cos\varphi - \frac{\sin(\varphi-\alpha)\sin\varphi}{\cos(\varphi+\alpha)}\right] = \frac{\sin 2(\varphi+\alpha) - \sin 2(\varphi-\alpha)}{4\cos(\varphi+\alpha)}. \qquad (9)$$

Очевидно,

$$\sin 2(\varphi+\alpha) - \sin 2(\varphi-\alpha) = 2\cos 2\varphi\sin 2\alpha.$$

Поэтому равенство (9) можно преобразовать к виду

$$\sin\alpha\,\frac{\cos\varphi\cos(\varphi+\alpha)-\sin(\varphi-\alpha)\sin\varphi}{\cos(\varphi+\alpha)}=\frac{\cos 2\varphi\sin 2\varphi}{2\cos(\varphi+\alpha)}$$

или

$$\sin\alpha\,[\cos\varphi\cos(\varphi+\alpha)-\sin(\varphi-\alpha)\sin\varphi]=\frac{\cos 2\varphi\sin 2\varphi}{2} \qquad (10)$$

(в силу условия (8) $\cos(\varphi+\alpha)\neq 0$).

Разделив обе части равенства (10) на $\sin\alpha\neq 0$, имеем

$$\cos\varphi\cos(\varphi+\alpha)-\sin(\varphi-\alpha)\sin\varphi=\cos 2\varphi\cos\alpha. \qquad (11)$$

Так как

$$\cos\varphi\cos(\varphi+\alpha)=0{,}5\,[\cos\alpha+\cos(2\varphi+\alpha)],$$

$$\sin(\varphi-\alpha)\sin\varphi=0{,}5\,[\cos\alpha-\cos(2\varphi-\alpha)],$$

то равенство (11) преобразуется к виду

$$0{,}5\,[\cos(2\varphi+\alpha)+\cos(2\varphi-\alpha)]=\cos 2\varphi\cos\alpha.$$

Заменив сумму, стоящую в квадратных скобках, произведением, убеждаемся в справедливости тождества (12).

Итак, доказано, что $|MK|=0{,}5\,(a-b)$.

Развитие функционального мышления учащихся и обучение их элементам математической деятельности можно считать главными задачами современного математического образования. Исследовательский подход к геометрическим задачам в том виде, как он описан в рассмотренных задачах, позволяет обучать учащихся математической организации эмпирического материала, логической организации математических фактов и применению математической теории. Школьники обучаются поиску решения задач.

Упражнения

1. Квадрат $ABCD$ задан координатами своих вершин A, B и D: $A\,(0,\ 0)$; $B\,(8,\ 0)$; $D\,(0,\ 8)$. Из точек C и A по сторонам квадрата в одно и то же время, против хода часовой стрелки, с постоянной скоростью начали движение точки M и K. Причем скорость движения точки M в два раза больше скорости движения точки K. Точка E — середина отрезка $[MK]$.

1) Построить путь движения точки E;

2) составить уравнение множества $\sum$ середин E всех отрезков $[MK]$;

3) доказать, что множество $\sum$ имеет ось симметрии.

2. Дан $\angle BAC$. Точка M расположена внутри этого угла. Точка $K\in[AC)$. Точка $D=[KM)\cap[AB)$. Точка K движется по лучу $[AC)$ (от точки A).

1) Как изменяется площадь $\triangle AKD$ при движении точки K по лучу $[AC)$?

2) указать то положение точки K на луче $[AC)$, при котором $\triangle AKD$ имеет наименьшую площадь.

3. Прямые a и b проходят через точки $A\,(0,\ -3)$ и $B\,(0,5)$ и параллельны оси абсцисс. Угол POE делится осью абсцисс на два конгруэнтных угла, каждый из которых равен α $(0<\alpha\leqslant 45^\circ)$. Точка $M=[OP)\cap b$, $K=[OE)\cap a$.

1) Определить $|OM|$ и $|OK|$; сравнить $|OM|$ и $|OK|$;

2) как изменяются $|OM|$ и $|OK|$ при вращении угла POE около точки O против хода часовой стрелки (угол вращения не превышает α)? При повороте на какой угол угла POE точки M не существует? Чему равна $|OK|$ при этом угле поворота? Существует ли такой поворот угла POE, в результате которого $|MO| = |KO|$?

3) Как изменяются $|OM|$ и $|OK|$ при вращении угла POE около точки O по ходу часовой стрелки (угол вращения не превышает α)? При повороте на какой угол угла POE точки K не существует? Существует ли такой поворот угла POE, в результате которого $|MO| = |KO|$?

4) Угол $\alpha = 30°$. Существует ли такая точка M на b, что $\triangle MKO$ является правильным? Почему?

5) Угол $\alpha = 45°$. Существует ли такая точка M на b, что $\angle MKO = 30°$? Почему?

6) Существуют ли на прямых a и b такие точки K и M, что $\triangle KMO$ подобен любому данному треугольнику?

4. Даны четыре параллельные плоскости α, β, φ, γ. Прямая $a \in \alpha$.

1) Плоскость ψ проходит через a и перпендикулярна плоскости α. Плоскость ψ пересекает плоскости β и φ соответственно по прямым b и c. Доказать, что на прямых a, b и c существуют соответственно точки A, B и C, которые являются вершинами правильного треугольника ABC;

2) через центр O треугольника ABC проведена прямая h, перпендикулярная плоскости ABC. Пересекает ли прямая h плоскость γ?

3) Плоскость ψ вращается около прямой a по ходу часовой стрелки (угол вращения $0 < \Theta < 90°$). Как изменяется расстояние между прямыми a, b и c с увеличением Θ? Как изменяется при этом длина стороны правильного треугольника ABC, вершины которого принадлежат прямым a, b и c? Как изменяется $|DO|$ $(D = h \cap \gamma)$ с увеличением угла Θ от 0° до 90°? Как изменяются $|AD|$, $|BD|$ и $|CD|$? Существует ли такое значение Θ, при котором четырехугольная пирамида $DABC$ является правильным тетраэдром?

4) Доказать, что на плоскостях α, β, φ, γ существуют соответственно такие точки A_1, B_1, C_1, D_1, что пирамида $A_1B_1C_1D_1$ подобна любой данной треугольной пирамиде.

Глава 6. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

§ 1. Методы геометрических преобразований

Метод параллельного переноса

Метод параллельного переноса заключается в том, что переносят на некоторый вектор какой-нибудь отрезок или другую часть исследуемой фигуры и сводят анализ (построение) данной фигуры к анализу (построению) вспомогательной, более простой фигуры, затем выполняют обратный перенос и переходят к анализу (построению) фигуры, указанной в задаче.

Задача 1. Построить четырехугольник $ABCD$, зная его стороны и отрезок $[PK]$, соединяющий середины сторон $[AD]$ и $[BC]$.

Допустим, что нужный нам четырехугольник построен (рис. 80). Перенесем сторону $[DC]$ на вектор $\overrightarrow{DP}$ и сторону $[AB]$ на вектор $\overrightarrow{AP}$. Теперь из точки P исходят три известной величины отрезка $[PC_1]$, $[PK]$ и $[PB_1]$.

Нетрудно убедиться, что точка K является серединой отрезка $[C_1B_1]$. В самом деле, отрезки $[CC_1]$ и $[BB_1]$ конгруэнтны $0{,}5\,[AD]$ и параллельны $[AD]$. Поэтому четырехугольник C_1CB_1B является параллелограммом. Точка K — середина его диагонали $[CB]$. Поэтому K принадлежит диагонали $[C_1B_1]$ и является ее серединой.

Таким образом, у треугольника PC_1B_1 известны стороны PC_1, PB_1 и заключенная между ними медиана PK. Как построить такой треугольник? Для этого построим точку P_1, симметричную P относительно K. Очевидно, $|C_1P_1| = |PB_1|$. Треугольник PP_1C_1 можно построить по трем известным сторонам: $[PC_1] \cong [DC]$, $[C_1P_1] \cong [PB_1] \cong [AB]$ и $[PP_1] \cong 2\,[PK]$. Теперь очевидно, что для того чтобы данная задача имела решение, необходимо, чтобы отрезки $[DC]$, $]AB]$ и $2\,[PK]$ были такими, из которых можно построить треугольник PC_1P_1.

Теперь построим искомый четырехугольник.

Строим треугольник PC_1P_1. Делим отрезок $[PP_1]$ точкой K на две равные части. Строим точку B_1, симметричную C_1 относительно K. Строим по трем известным сторонам треугольники C_1KC и KBB_1. Переносим отрезок $[C_1C]$ на вектор $\overrightarrow{C_1P}$ в положение $[PD]$). Пере-

носим отрезок $[BB_1]$ на вектор $\overrightarrow{B_1P}$ (в положение $[AP]$). Все четыре вершины искомого четырехугольника $ABCD$ построены.

Обоснование выполненного построения предоставляем читателю.

Задача 2. Даны две окружности $O\,(R)$ и $O_1\,(R_1)$ и прямая p, причем $R > R_1$. Параллельно прямой p провести прямую, образующую в данных окружностях хорды AB и CD, сумма которых равна данному отрезку m.

Допустим, что $(AD) \parallel p$ и $|AB| + |CD| = m$ (рис. 81). Перенесем окружность $O_1\,(R_1)$ на вектор $\overrightarrow{CB}$ (в положение O_1'). Тогда хорда CD займет положение BD_1 и $|AD_1| = m$.

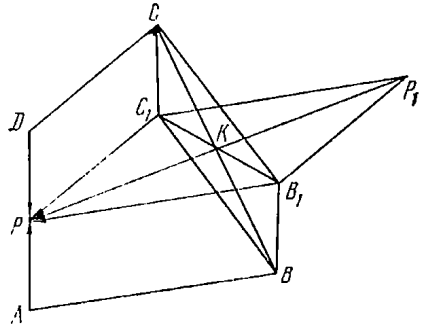


Рис. 80

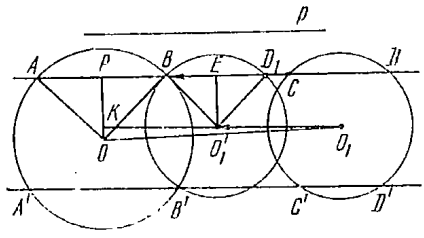


Рис. 81

Построим $[OP] \perp (AB)$ и $[O_1'E] \perp (BD_1)$. Очевидно, $|PE| = 0{,}5m$. Прямая (O_1O_1') пересекает $[OP]$ в точке K. Причем $|KO_1'| = |PE| = 0{,}5m$ и $(KO_1') \parallel p$. Из проведенного анализа понятно следующее решение задачи.

Строим прямоугольный треугольник OKO_1, катет O_1K которого параллелен прямой p. Строим отрезок $[KO_1'] \cong 0{,}5m$. Строим окружность $O_1'\,(R_1)$. В пересечении с окружностью $O\,(R)$ получаем точку B. Через B проводим прямую, параллельную p. В пересечении с данными окружностями получаем искомые хорды AB и CD.

Исследуем, сколько решений может иметь задача. Во-первых, можно построить единственный прямоугольник OKO_1, катет O_1K которого параллелен прямой p. Поэтому существуют и единственные точка O_1' и окружность $O_1'\,(R_1)$. Отсюда ясно, что если окружности $O\,(R)$ и $O_1'\,(R_1)$ не пересекаются, то задача решений не имеет. Если они касаются (в точке B), то решение одно. Если окружности $O\,(R)$ и $O_1'\,(R_1)$ пересекаются в двух точках B и B' (рис. 81), то задача имеет два решения: хорды AB и CD, $A'B'$ и $C'D'$.

Метод осевой симметрии

Метод осевой симметрии заключается в следующем. Задача предполагается решенной, и одна точка (прямая) из данных в условии задачи заменяется точкой (прямой), симметричной относительно некоторой прямой. После этого симметричная точка (прямая) подчиняется тем условиям, которым должна удовлетворять замененная точка (прямая). В результате получаем новую задачу, которая решается каким-нибудь из известных уже способов.

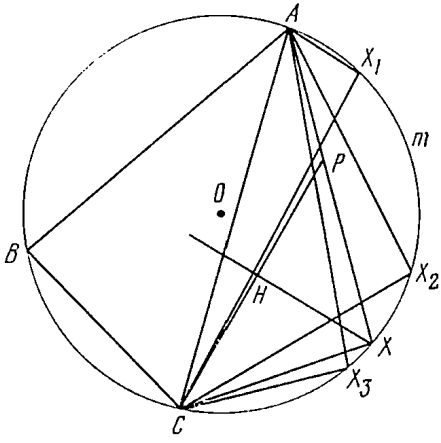


Рис. 82

Задача 3. Дан остроугольный треугольник ABC. Построить такую точку X, чтобы четырехугольник $ABCX$ был: 1) вписываемый и 2) описываемый.

1) Описываем окружность ω вокруг треугольника ABC (рис. 82). Из условия задачи ясно, что точка X принадлежит той дуге окружности ω, которой не принадлежит точка B. Выясним, сколько решений может иметь задача. Путь для определенности $|BA| > |BC|$. Четырехугольник $ABCX$ вписываемый, если $|BC| + |AX| = |BA| + |CX|$. При движении точки X по дуге AmC (которой не принадлежит B) от A к C $|AX|$ увеличивается от нуля до $|AC|$ (треугольник ABC остроугольный, поэтому $|AC|$ меньше диаметра описанной окружности), а $|CX|$ уменьшается от $|AC|$ до нуля. Каждая сторона треугольника меньше суммы остальных двух сторон. Поэтому на дуге AmC существует единственная точка X, такая, что $|BC| + |AX| = |BA| + |CX|$.

2) Пусть X — искомая точка на дуге AmC. Построим биссектрису $[XH)$ угла AXC. Построим точку P, симметричную C относи-

тельно (XH). Очевидно, $P \in (AX)$. Причем $|AP| = |AX| - |PX| = |AX| - |CX| = |AB| - |BC|$, так как $|BC| + |AX| = |BA| + |CX|$. Угол AXC известен (как угол, вписанный в данную окружность и опирающийся на данную хорду AC). Поэтому известен и острый $\angle CPX$ равнобедренного треугольника CPX, а следовательно, и смежный с ним тупой угол APC. Теперь у треугольника APC известны стороны $|AC|$, $|AP|$ и тупой $\angle APC$. Кроме того, $|AP| < |AX| < |AC|$. Поэтому по сторонам $|AC|$ и $|AP|$ и тупому углу можно построить единственный треугольник ACP, принадле-

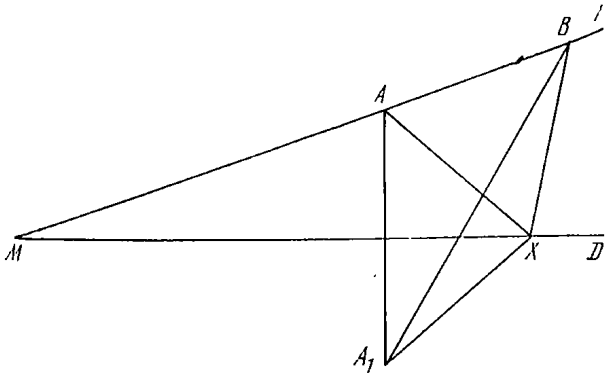


Рис. 83

жащий сегменту AmC. Искомая точка X определяется пересечением прямой (AP) с дугой AmC.

Задача 4. Угол FMD — острый. Точки A и B принадлежат его стороне $[MF)$. На луче $[MD)$ построить такую точку X, чтобы разность $B\hat{A}X - A\hat{B}X$ была данной величины (рис. 83).

Установим сначала, сколько решений имеет задача. При движении точки X по лучу $[MD)$ (вправо от точки M) $B\hat{A}X$ уменьшается от 180° до $B\hat{M}D$. При таком движении X $A\hat{B}X$ увеличивается от 0° до угла, сумма которого вместе с $B\hat{M}D$ равна 180°. Поэтому $\alpha = B\hat{A}X - A\hat{B}X$ при таком движении точки X уменьшается от 180° до 0° (по условию задачи угол BAX больше угла ABX). Причем $\alpha = 0°$, если точка X лежит на симметрали отрезка $[AB]$. Таким образом, задача имеет единственное решение при любом значении α.

Строим точку A_1, симметричную A относительно прямой (MD).

Строим отрезки $[A_1B]$ и $[A_1X]$. Нетрудно убедиться, что $\overset{\wedge}{A_1XB} = 360^\circ - 2\ \overset{\wedge}{A_1AB} + \alpha$.

Таким образом, $\overset{\wedge}{A_1XB}$ известна, если известен угол α. Теперь можно построить дугу окружности, которая стягивается хордой A_1B и в которую вписывается известный $\angle\ A_1XB$. Пересечение этой дуги с прямой (MD) дает нам искомую точку X.

Метод вращения

Метод вращения заключается в том, что, повернув какую-либо данную или искомую фигуру вокруг некоторого центра на неко-

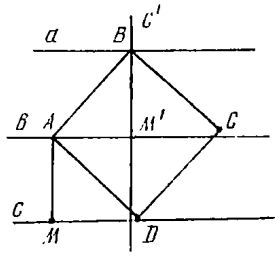


Рис. 84

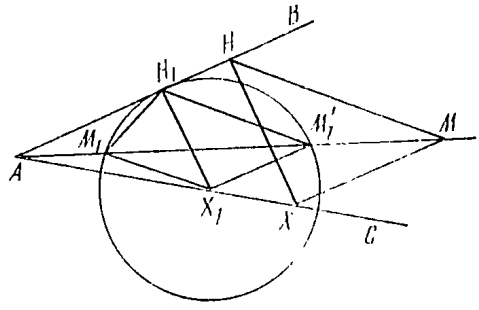


Рис. 85

торый угол, сводят анализ рассматриваемой фигуры к анализу более простой фигуры, а потом выполняют обратное вращение и в результате получают искомую фигуру. Центр вращения и угол поворота следует выбирать так, чтобы в результате поворота совместились равные элементы или получилось более простое их взаимное расположение.

Задача 5. Построить квадрат, вершины которого лежали бы по одной на каждой из трех данных параллельных прямых a, b, c.

Анализ. Пусть квадрат $ABCD$ — искомый (рис. 84). Замечаем, что точка D переводится в точку B вращением вокруг центра A на угол 90° (против хода часовой стрелки). Если повернуть вокруг центра A всю фигуру на прямой угол, то вершина D при этом окажется в положении точки B, а прямая c перейдет в прямую c', перпендикулярную прямой a и проходящую через вершину B искомого квадрата. При этом вращении треугольник ADM перейдет в конгруэнтный ему $\triangle\ AM'B$ (сторона $[AM]$ перпендикулярна прямой c и сторона $[AM']$ перпендикулярна прямой c'). Таким образом, вершина B искомого квадрата $ABCD$ является пересечением

прямых a и c'. Вершина A при построении может быть выбрана произвольно на прямой b.

Построение. На прямой b отмечаем произвольную точку A. Из нее опускаем перпендикуляр $[AM]$ на прямую c. Вращаем прямую c вокруг точки A до совмещения с прямой c', т. е. строим на прямой b отрезок $[AM']$, конгруэнтный $[AM]$, и через точку M проводим прямую $c' \perp b$. Получаем $B = c' \cap a$. На полученном отрезке $[AB]$ строим квадрат $ABCD$.

Обоснование построения и исследование решения предоставляем читателю.

Метод гомотетии и подобия

Метод гомотетии и подобия заключается в следующем. Данная задача сводится к задаче на построение фигуры, гомотетичной (подобной) искомой, т. е. отбрасывается какое-нибудь одно из условий, характеризующих размеры искомой фигуры. Потом построенная вспомогательная фигура подвергается преобразованию гомотетии (подобия) так, чтобы после преобразования уже выполнялось и ранее отброшенное условие. В результате получается искомая фигура.

Задача 6. Даны острый $\angle BAC$ и внутри него точка M. Построить на стороне $[AC)$ угла точку X, равноотстоящую от стороны $[AB)$ и от точки M (рис. 85).

Построим луч $[AM)$. Заменим данную задачу более простой.

На стороне $[AC)$ $\angle BAC$ дана точка X_1. Построить на луче $[AM)$ точку M_1 такую, чтобы расстояние $|X_1H_1|$ от X_1 до луча $[AB)$ было равно $|X_1M_1|$.

Строим $[X_1H_1] \perp (AB)$ и окружность $X_1(|X_1H_1|)$. При любом положении точки X_1 на стороне $[AC)$ острого $\angle BAC$ эта окружность пересекает луч $[AM)$ в двух точках M_1 и M_1'.

Теперь ясно, что если $M = M_1'$ или $M = M_1$, то точка $X = X_1$. Если $M \neq M_1$ и $M \neq M_1'$, то через M проводим $(MH) \parallel (M_1'H_1)$ (рис. 85). Из точки H восставляем перпендикуляр к $[AB)$. В пересечении этого перпендикуляра с лучом $[AC)$ получаем искомую точку X. Справедливость этого утверждения следует из подобия треугольников $H_1X_1M_1'$ и HXM.

Еще одно решение (точку X') получим, если проведем через M прямую, параллельную (M_1H_1). В пересечении с (AB) получим точку H'. Восставим перпендикуляр к (AB) в точке H'. При его пересечении с лучом $[AC)$ получим точку X'.

Задача 7. Данную трапецию $ABCD$ (рис. 86) пересечь отрезком $[FH]$, параллельным основаниям, так, чтобы он разделился диагоналями на конгруэнтные отрезки $[FK]$, $[KM]$ и $[MH]$.

Выясним сначала, сколько решений имеет эта задача. Для этого через точку O пересечения диагоналей $[BD]$ и $[AC]$ проведем отрезок $[F_0H_0] \parallel [BC]$. Треугольники OH_0D и BCD, F_0OA и BCA подобны, причем у них один и тот же коэффициент подобия. Поэтому $|F_0O| = |OH_0|$. Проведем еще несколько отрезков $[FH]$, параллельных основаниям трапеции. Очевидно, с увеличением расстояния между (F_0H_0) и (FH) равные $|FK|$ и $|MH|$ будут уменьшаться от $|OH_0|$ до нуля, а отрезок $[KH]$ будет увеличиваться от нуля до одного из оснований трапеции. Поэтому существует два положения отрезка $[FH]$, при котором $|FK| = |KM| = |MH|$. На рис. 86 этим положениям соответствуют отрезки $[F_1H_1]$ и $[F_2H_2]$.

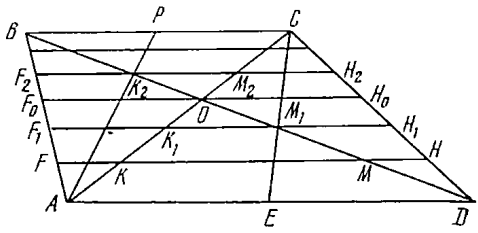


Рис. 86

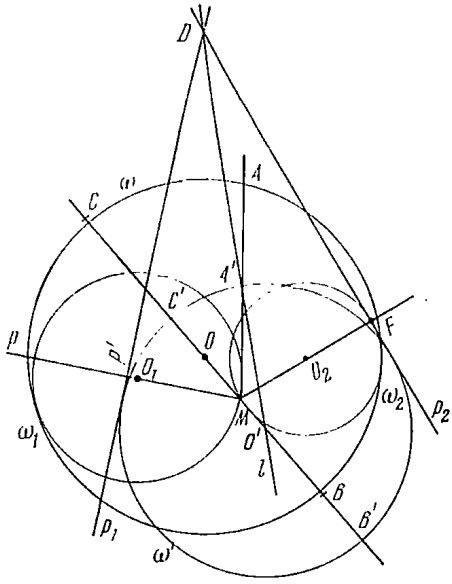


Рис. 87

Теперь нетрудно заметить, что отрезок $[M_1C]$ является медианой треугольника K_1H_1C. Но треугольники CK_1H_1 и CAD подобны. Поэтому середина отрезка $[AD]$ (точка E) принадлежит прямой (M_1C). Теперь ясно, что (F_1H_1) проходит через точку M_1, в которой пересекаются медиана $[CE]$ треугольника ADC и диагональ $[BD]$.

Рассуждая аналогично, приходим к выводу, что отрезок $[F_2H_2]$ проходит через точку K_2, в которой пересекаются диагональ $[DB]$ и медиана $[AP]$ треугольника BAC.

Метод инверсии

Задача 8. Построить окружность ω, проходящую через данную точку A и касающуюся двух данных пересекающихся окружностей ω_1 и ω_2 (точка A лежит вне данных кругов).

Примем точку M пересечения окружностей ω_1 и ω_2 за центр

инверсии (рис. 87). Для упрощения построений в качестве степени инверсии k возьмем квадрат диаметра окружности ω_2.

Итак, $k = |MF|^2$, где $|MF|$ — диаметр ω_2. При этом условии инверсия с центром M переведет окружность ω_2 в прямую p_2, касающуюся ω_2 в точке F. Эта же инверсия преобразует окружность ω_1 в прямую p_1, перпендикулярную прямой (MO_1) и проходящую через точку P', определяемую из равенства $|MP'| \cdot |MP| = |MF|^2$, т. е. $|MP'| = |MF|^2 : |MP|$. При этой же инверсии точка A преобразуется в точку A', принадлежащую лучу $[MA)$ и определяемую равенством $|MA'| = |MF|^2 : |MA|$.

Искомая окружность ω этой инверсией преобразуется в окружность ω', проходящую через A' и касающуюся прямых p_1 и p_2. Построение окружности ω' сводится к определению ее центра — точки O'. Этот центр лежит на биссектрисе l угла, образованного прямыми p_1 и p_2. Итак, эта задача свелась к отысканию на прямой l точки O', одинаково удаленной от прямой p_1 и точки A' (см. задачу 6).

Теперь осталось по образу ω' построить искомую окружность ω. Для этого через M проводим диаметр $[B'C']$ окружности ω'. На прямой $(B'C')$ строим точки B и C, определяемые равенствами $|MB| = |MF|^2 : |MB'|$, $|MC| = |MF|^2 : |MC'|$. Середина (точка O) отрезка $[BC]$ является центром искомой окружности.

Задача имеет два решения, потому что можно построить две окружности, проходящие через A' и касающиеся пересекающихся прямых p_1 и p_2.

Упражнения

Метод параллельного переноса

1. Даны две точки A и B и между ними две параллельные прямые (MK) и (PH). Провести между прямыми в заданном направлении отрезок $[CD]$ так, чтобы сумма $|AC| + |CD| + |BD|$ была наименьшая.

2. Доказать, что если у четырехугольника $ABCD$ $2|MN| = |AB| + |CD|$ (M — середина стороны $[AD]$, N — середина стороны $[BC]$), то этот четырехугольник является трапецией.

3. В треугольнике ABC провести отрезок $[DE]$ данной длины (D лежит на стороне $[AB]$, E — на $[BC]$) так, чтобы отношение $|AD| : |CE|$ было данное.

4. Стороны $\triangle ABC$ равны a, b, c. Доказать, что длина его медианы $[AM]$ определяется по формуле $|AM| = 0{,}5\sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2}$.

5. Построить вписываемый четырехугольник $ABCD$, зная два отрезка, соединяющие середины противоположных сторон, угол между диагоналями и угол между диагональю и одной стороной.

6. Доказать, что если две биссектрисы треугольника конгруэнтны, то треугольник равнобедренный.

7. Построить трапецию, зная диагонали и параллельные стороны.

8. Построить четырехугольник, зная две противоположные стороны, угол между ними, отношение диагоналей и угол между ними.

9. Построить трапецию, зная диагонали, угол между ними и разность смежных двух сторон.

10. Построить треугольник ABC, зная угол $\hat{B}$ и медианы AE и CD.

Метод осевой симметрии

11. Построить треугольник ABC, зная сторону $[BC]$, высоту $[AH]$ и биссектрису $[AK]$.

12. Построить окружность, касающуюся прямой (AB) в данной точке M и пересекающую данную окружность O под данным углом.

13. Доказать, что три точки, симметричные точке пересечения высот произвольного $\triangle ABC$ относительно прямых (AB), (BC) и (CA), принадлежат окружности, описанной около этого треугольника.

14. Построить четырехугольник $ABCD$, зная его стороны, если диагональ AC делит угол пополам.

15. Доказать, что если многоугольник имеет больше двух осей симметрии, то все они пересекаются в одной точке.

16. Построить треугольник ABC, зная $\hat{B}$, $|BC|$ и разность длин стороны $[AC]$ и высоты $[AD]$.

17. Доказать, что сумма расстояний от любой точки, лежащей на основании равнобедренного треугольника, до его боковых сторон равна высоте треугольника, опущенной на боковую сторону.

18. Построить треугольник ABC, зная $\hat{A}$, длину медианы $[BM]$ и сумму длин сторон $[AC]$ и $[AB]$.

19. Доказать, что если в квадрат вписан прямоугольник с неконгруэнтными сторонами так, что на каждой стороне квадрата лежит одна вершина прямоугольника, то диагонали квадрата являются осями симметрии прямоугольника.

20. Из данных точек A и B провести две прямые так, чтобы угол между ними делился данной прямой (MK) пополам.

21. Доказать, что из всех равновеликих треугольников с общим основанием наименьший периметр имеет равнобедренный треугольник.

Метод вращения

22. Дана точка A и прямые a и b. Построить правильный треугольник ABC, вершины B и C которого лежат на прямых a и b.

23. На сторонах произвольного $\triangle ABC$, вне его построены правильные треугольники. Доказать, что центры вращения этих треугольников являются вершинами правильного треугольника.

24. Даны две концентрические окружности и точка A вне их. Построить равносторонний $\triangle ABC$, вершины B и C которого лежат на окружностях.

25. На сторонах произвольного параллелограмма вне его построены квадраты. Доказать, что их центры вращения являются вершинами квадрата.

26. Вписать в параллелограмм новый параллелограмм с данными отношениями сторон и углом между диагоналями.

27. Доказать, что произведение четного числа осевых симметрий есть вращение около точки или параллельный перенос.

28. Даны две пересекающиеся в M и K окружности и на них по точке A и B. Провести окружность через A и B, встречающую данные окружности в X и Y так, чтобы дуги AX и BY данных окружностей имели одинаковое число градусов.

29. Доказать, что произведение двух центральных симметрий на плоскости есть параллельный перенос или тождественное преобразование.

Гомотетия и подобие

30. Построить треугольник ABC, зная угол $\hat{A}$, высоту $[AH]$ и отношение $|AC|:|AB|$.

31. Построить треугольник ABC, зная угол $\hat{A}$, высоту $[CH]$ и отношение $|BC|:|AB|$.

32. Даны окружность и две прямые (AB) и (CD). Перпендикулярно к (CD) провести новую прямую так, чтобы ее отрезок между (AB) и окружностью делился прямой (CD) в данном отношении.

33. Доказать, что середины сторон $\triangle ABC$ являются вершинами $\triangle A_1B_1C_1$, гомотетичного $\triangle ABC$ с коэффициентом гомотетии $-0{,}5$ и центром гомотетии в точке пересечения медиан.

34. Даны две окружности и точка A. Провести к окружностям параллельные касательные так, чтобы отношение их расстояний до точки A было данное.

35. Доказать, что отрезок, соединяющий основания двух высот остроугольного треугольника, отсекает от него подобный треугольник.

36. Через данную точку провести прямую, отрезки которой в двух данных окружностях пропорциональны радиусам.

37. Через точки A и B провести окружность, касательную к данной окружности.

38. Окружность ω касается двух неконгруэнтных окружностей ω_1 и ω_2. Доказать, что прямая, проходящая через точки касания, проходит через один из центров гомотетии окружностей ω_1 и ω_2.

Метод инверсии

39. Через две данные точки провести окружность, пересекающую данную окружность под данным углом.

40. Через данную точку провести окружность, пересекающую данные две окружности под данными углами.

41. Три данные окружности пересекаются в одной точке. Провести окружность, пересекающую их под данными углами.

§ 2. Метод пересечения фигур

Построение общего элемента точечных множеств

Этот метод часто называют методом геометрических мест точек. Сущность его в следующем. Устанавливается множество точек, удовлетворяющих только одному из условий задачи. Строится множество точек, отвечающих только второму условию задачи. Пересечение этих двух точечных множеств определяет искомую геометрическую фигуру.

Задача 1. Доказать, что основания A_1, B_1, C_1 высот $[AA_1]$, $[BB_1]$, $[CC_1]$ треугольника ABC являются вершинами треугольника $A_1B_1C_1$, для которого высоты треугольника ABC есть биссектрисы внутренних углов (рис. 88).

Считаем для определенности данный треугольник ABC остроугольным. Пусть $M=(AA_1)\cap(CC_1)\cap(BB_1)$. Углы AC_1M и AB_1M

прямые. Поэтому точки C_1 и B_1 принадлежат окружности, диаметром которой является отрезок $[AM]$. Углы $C_1\hat{A}M$ и $C_1\hat{B}_1B$ равны, потому что они вписаны в одну и ту же окружность и опираются на дугу MC_1.

Углы CB_1M и CA_1M прямые. Поэтому точки B_1 и A_1 лежат на окружности, построенной на $[MC]$, как на диаметре. Очевидно, $\angle BB_1A_1 \cong \angle BCC_1$.

Из прямоугольных треугольников ABA_1 и CBC_1 следует, что $B\hat{A}A_1 = B\hat{C}C_1 = 90° - A\hat{B}C$. Таким образом $\angle BB_1C_1 \cong \angle BB_1A_1$.

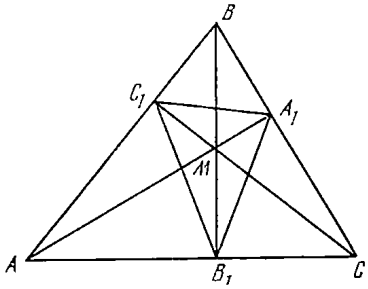


Рис. 88

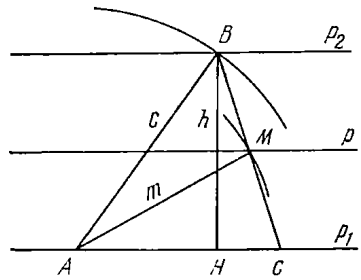


Рис. 89

Отсюда ясно, что луч $[B_1B)$ является биссектрисой угла $C_1B_1A_1$.

Аналогичным образом доказывается, что $(AA_1]$ делит пополам угол $C_1A_1B_1$ и $[C_1C)$ является биссектрисой угла $B_1C_1A_1$.

Задача 2. Построить $\triangle ABC$, зная длину его стороны $|AB| = c$, высоты $|BH| = h$ и медианы $|AM| = m$.

Зная длину высоты $|BH|$ искомого $\triangle ABC$, можно утверждать, что его вершина B принадлежит прямой p_2, параллельной прямой p_1 и отстоящей от нее на h (рис. 89). Отмечаем на прямой p_1 произвольную точку A. Так как $|AB| = c$, то вершина B принадлежит также окружности с центром в точке A и радиусом c. Таким образом, точка B определяется как пересечение двух точечных множеств — прямой p_2 и окружности $A(c)$. Попутно заметим, что пересечение этих двух множеств будет непустым, если $c \geqslant h$. Нам осталось определить положение вершины C на прямой p_1. Очевидно, она будет определена, если установим, пересечением каких множеств является середина стороны $[BC]$, т. е. точка M. Длина медианы $|AM| = m$. Поэтому M принадлежит окружности $A(m)$. С другой стороны, точка M одинаково удалена от прямых p_1 и p_2. Поэтому M принадлежит прямой p, параллельной p_1 и p_2 и одинаково от них отстоящей.

Строим прямую p. Находим $M = A(m) \cap p$. Точка $C = (BM) \cap p_1$. Очевидно, что M будет существовать только в том случае, если $m \geqslant 0{,}5h$.

Исследование числа решений задачи предоставляем читателю.

Задача 3. Через данную точку A провести окружность, пересекающую две данные окружности $B(b)$ и $C(c)$ под прямым углом (взаимное расположение точки A и окружностей показано на рис. 90).

По определению окружности пересекаются под прямым углом, если касательные к ним в точке пересечения образуют прямой

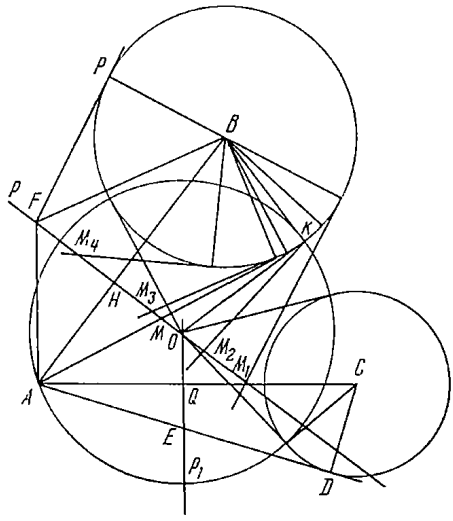


Рис. 90

угол. Очевидно, две окружности пересекаются под прямым углом, если их радиусы, соединяющие точку пересечения с центрами, взаимно перпендикулярны.

Установим сначала, что представляет собой множество центров окружностей, проходящих через A и пересекающих под прямым углом окружность $B(b)$. Для этого отметим на окружности $B(b)$ несколько точек и проведем через них касательные к окружности $B(b)$. При помощи циркуля (методом проб) найдем на этих касательных центры M_1, M_2, M_3, M_4, ... окружностей, проходящих через A и через отмеченные точки на окружности $B(b)$ Нетрудно заметить, что точки M_1, M_2, M_3, M_4, ... принадлежат некоторой прямой p. Выясним, каковы свойства этой прямой и как доказать, что этой прямой принадлежат центры всех окружностей, проходящих через A и ортогональных окружности $B(b)$.

Во-первых, очевидно, прямая p проходит через середину M отрезка касательной $[AK]$ к окружности $B\,(b)$. Далее, построив отрезок $[AB]$, нетрудно обнаружить, что $p \perp (AB)$.

Таким образом, в результате проведенных построений и измерений у нас появилась гипотеза:

центры окружностей, проходящих через A и ортогональных окружности $B\,(b)$, принадлежат прямой p, проходящей через середину катета $[AK]$ прямоугольного треугольника AKB и перпендикулярной его гипотенузе $[AB]$. Докажем эту гипотезу.

Обозначим $|AB| = m$. Пусть M — середина $[AK]$ и p проходит через M и перпендикулярна (AB). Обозначим $H = (AB) \cap p$. Треугольники AHM и AKB подобны. Поэтому $|BA| : |AM| = |KA| : |AH|$. Отсюда $|AH| = |AM| \cdot |KA| : |BA|$. Но $|AM| = 0{,}5\,|AK|$. Поэтому

$$|AH| = |KA|^2 : 2\,|BA| = (|BA|^2 - |BK|^2) : 2\,|BA| = (m^2 - b^2) : 2m. \qquad (1)$$

Пусть F — произвольная точка p и $[FP]$ — отрезок касательной к окружности $B\,(b)$. Докажем, что $|PF| = |FA|$, т. е. докажем, что окружность $F\,(FA)$ ортогональна окружности $B\,(b)$.

Из прямоугольного треугольника FHA и равенства (1)

$$|FA|^2 = |FH|^2 + |HA|^2 = |FH|^2 + \left(\frac{m^2 - b^2}{2m}\right)^2. \qquad (2)$$

Из прямоугольных треугольников FPB и FHB следует

$$|FP|^2 = |FB|^2 - |BP|^2 = (|FH|^2 + |HB|^2) - b^2 = |FH|^2 + (|AB| - |AH|)^2 - b^2 = |FH|^2 + \left(m - \frac{m^2 - b^2}{2m}\right)^2 - b^2 =$$

$$= |FH|^2 + \left(\frac{m^2 + b^2}{2m}\right)^2 - b^2 = |FH|^2 + \left(\frac{m^2 - b^2}{2m}\right)^2. \qquad (3)$$

Из равенств (2) и (3) ясно, что $|FA| = |FP|$. Гипотеза доказана.

На основании выполненного исследования строим центр искомой окружности X. Проводим касательную через A к $C\,(c)$. Через середину E ее отрезка $[AD]$ проводим прямую p_1, перпендикулярную отрезку $[AC]$. Прямой p_1 принадлежат центры всех окружностей, проходящих через A и ортогональных окружности $C\,(c)$. Поэтому центр O искомой окружности есть точка пересечения прямых p и p_1.

Упражнения

1. Построить треугольник ABC, зная угол $\hat{B}$, высоту $[AH]$ и медиану $[AM]$.

2. Построить ромб так, чтобы две его противоположные вершины были в двух данных точках, а третья — на данной окружности.

3. Даны три окружности. Две из них — концентрические. Построить окружность, которая касается всех трех окружностей.

4. В окружность с центром O вписать прямоугольный треугольник ACB, если известны острый угол A и точка K, через которую проходит один катет.

5. В $\triangle ABC$ сторона $|AC|$ — наибольшая. Доказать, что для любой точки M плоскости $|AM|+|CM| \geqslant |BM|$. В каких случаях возможно равенство?

6. Построить треугольник ABC, если известны угол $\hat{A}$, высота $[AH]$ и медиана $[BM]$.

7. Пять отрезков таковы, что из любых трех из них можно составить треугольник. Доказать, что хотя бы один из них остроугольный.

8. Построить ромб, две стороны которого находятся на данных двух параллельных прямых (AB) и (CD), а другие две проходят через данные точки K и M.

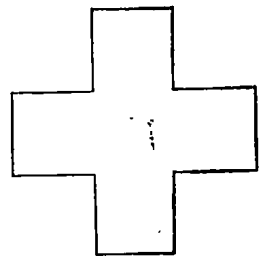


Рис. 91

9. Дана окружность, ее диаметр $|AB|$ и точка $C \in [AB]$. Построить на окружности такие точки X и Y, что $Y = S_{(AB)}(X)$ и $(YC) \perp (XA)$.

10. Построить квадрат $ABCD$, стороны которого проходят через данные точки M, K, P, H.

11. В $\triangle ABC$ через середину M стороны $[BC]$ и центр O вписанной в него окружности проведена прямая (MO), которая пересекает высоту $[AH]$ в точке E. Доказать, что $|AE| = r$.

12. В данной окружности построить хорду данной длины так, чтобы она делилась пополам данной прямой.

13. Окружность, построенная на высоте $[AD]$ прямоугольного $\triangle KBC$, как на диаметре, пересекает катет $[AB]$ в точке K, а катет $[AC]$ — в точке M. Отрезок $[KM]$ пересекает высоту $[AD]$ в точке L. Известно, что $|AL|^2 = |AK| \cdot |AM|$. Найти острые углы $\triangle ABC$.

14. Через данную точку A провести к данной окружности секущую, которая определила бы хорду данной длины.

15. Данным радиусом r провести окружность, касательную к данной прямой (MK) и пересекающую данную окружность $O(R)$ по хорде данной длины a.

16. На рис. 91 изображен многоугольник, состоящий из пяти конгруэнтных квадратов. Разделить его на три многоугольника, из которых можно сложить прямоугольник с отношением сторон 1 : 2.

17. На плоскости дан отрезок $[AB]$ и внутри него произвольная точка M. На отрезках $[AM]$ и $[MB]$ как на сторонах построены квадраты $AMCD$ и $MBEF$, лежащие по одну и ту же сторону от (AB). Окружности, описанные около квадратов с центрами P и Q, пересекаются, кроме точки M, еще в точке H. Показать, что прямые (AF) и (BC) проходят через H. Доказать, что при любом положении M прямая (MH) проходит через одну и ту же точку K. Найти множество середин отрезков $[PQ]$, если M перемещается по отрезку $[AB]$.

18. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Установить множество середин отрезков $[XY]$, X — любая точка отрезка $[AC]$ и Y — любая точка отрезка $[B_1D_1]$. Установить множество точек M отрезка $[XY]$, которые удовлетворяют соотношению $|MY| = 2|XM|$.

19. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Точка X движется с постоянной скоростью по сторонам квадрата $ABCD$ в направлении $ABCDA$, и точка Y движется с той же скоростью по сторонам квадрата B_1C_1CB в направлении $B_1C_1CBB_1$. Точки X и Y начинают двигаться в один и тот же момент из исходных положений A и B_1 соответственно. Найти и построить множество середин $[XY]$.

20. Дан прямоугольный треугольник ABC, катеты которого $[CB]$ и $[CA]$

удовлетворяют соотношению $|CB| > |CA|$. Найти множество всех точек X треугольника ABC, для которых одновременно выполнены следующие соотношения: $|XA| \geqslant |XB| \geqslant |XC|$, $x_1 \geqslant x_2 \geqslant x_3$, где x_1, x_2, x_3 — расстояния от точки X до сторон $[BC]$, $[CA]$, $[AB]$ треугольника ABC соответственно.

21. Даны две одинаковые окружности k_1 и k_2, которые пересекаются в двух разных точках P и Q. Через точку P проведена прямая, пересекающая обе окружности еще в двух точках X и Y, взаимно отделенных друг от друга точкой P. Установить множество середин сторон треугольника QXY. Найти, какую фигуру заполнят центры окружностей, описанных около треугольника QXY.

22. Доказать, что во всяком выпуклом многограннике M сумма длин всех ребер больше утроенного диаметра. (Диаметром многогранника называется наибольшая из длин всевозможных отрезков с концами в вершинах многогранника.)

§ 3. Задачи на изображение пространственных фигур

Метод следов построения сечений многогранника плоскостью

Метод следов построения сечений пирамид и призм заключается в следующем. Строится прямая (след) пересечения секущей плоскости с плоскостью основания пирамиды или призмы. Находятся

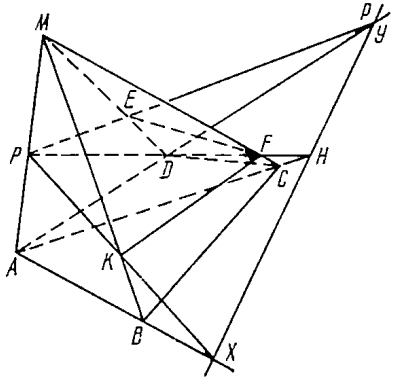


Рис. 92

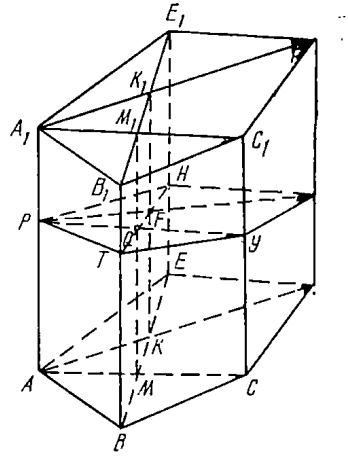


Рис. 93

точки встречи следа с плоскостями боковых граней и диагональных сечений этих многогранников. Эти точки вместе с данными точками секущей плоскости определяют прямые, которым принадлежат стороны (диагонали) искомого сечения.

Задача 1. Дано изображение четырехугольной пирамиды $MABCD$ (рис. 92). Точка $P \in [AM]$, $E \in [MD]$, $K \in [MB]$. Построить сечение пирамиды плоскостью PKE.

Для построения следа p пересечения секущей плоскости PKE с плоскостью основания $ABCD$ пирамиды необходимо найти две точки, принадлежащие плоскостям PKE и ABC. Строим $Y = (PE) \cap (AD)$, $X = (PK) \cap (AB)$. Прямая (XY) является следом p, так как X и Y принадлежат плоскостям ABC и PKE. Для построения точки встречи секущей плоскости с ребром $[CM]$ (или его продолжением) найдем точку H пересечения следа с плоскостью ACM. Очевидно, $H = p \cap (AC)$. Строим $F = (PH) \cap (MC)$. Четырехугольник $PEFK$ — искомое сечение.

Метод деления n-угольной пирамиды (призмы) на треугольные пирамиды (призмы)

Из данной n-угольной призмы (пирамиды) выделяется та треугольная призма (пирамида) П, на боковых ребрах которой лежат точки, определяющие искомое сечение. Строится сечение этой призмы (пирамиды), а затем — сечения тех треугольных призм (пирамид), которые имеют общие части с фигурой П.

Задача 2. Дано изображение призмы $ABCDEA_1B_1C_1D_1E_1$ (рис. 93). Точка $P \in [AA_1]$, $H \in [EE_1]$, $T \in [BB_1]$. Построить сечение призмы плоскостью PHT.

Треугольник PHT — сечение призмы $ABEA_1B_1E_1$. С этой призмой имеют общие части призмы $ABCA_1B_1C_1$, $ADEA_1D_1E_1$. Пусть $M = (AC) \cap (BE)$, $K = (AD) \cap (BE)$, $M_1 = (A_1C_1) \cap (B_1E_1)$, $K_1 = (A_1D_1) \cap (B_1E_1)$. Отрезок $[MM_1]$ — пересечение боковых граней ACC_1A_1 и BEE_1B_1 призм $ABCA_1B_1C_1$ и $ABEA_1B_1E_1$. Поэтому существует точка $Q = (TH) \cap (MM_1)$.

Треугольник PTY ($Y = (PQ) \cap (CC_1)$) является сечением призмы $ABCA_1B_1C_1$ плоскостью PHT. На основании аналогичных рассуждений получаем: $F = (TH) \cap (KK_1)$, $X = (PF) \cap (DD_1)$.

Треугольник PHX — сечение призмы $ADEA_1D_1E_1$ плоскостью PTH. Пятиугольник $PTYXH$ — искомое сечение.

Метод дополнения n-угольной пирамиды (призмы) до треугольной пирамиды (призмы)

Данная призма достраивается до треугольной призмы. Строится ее сечение. Искомое сечение получается как часть сечения треугольной призмы.

Задача 3. Дано изображение пирамиды $MABCDE$ (рис. 94). Точка $F \in [AM]$, $T \in [MC]$. Построить сечение пирамиды плоскостью FBT.

Строим $P = (BC) \cap (DE)$, $K = (AB) \cap (DE)$. Соединив отрезками точки M и K, P и M, получаем треугольную пирамиду $MKBP$,

частью которой является данная пятиугольная пирамида. Строим сечение пирамиды $MKBP$ плоскостью FBT: $X = (FB) \cap (KM)$, $Y = (BT) \cap (MP)$. Треугольник XYB — сечение пирамиды $MKBP$ плоскостью FBT. Получаем $Q = (EM) \cap (XY)$, $H = (MD) \cap (XY)$. Пятиугольник $QHTBF$ — искомое сечение.

Метод параллельных прямых

В основу этого метода положено свойство параллельных плоскостей: «прямые, по которым плоскость пересекает данные параллельные плоскости, параллельны между собой».

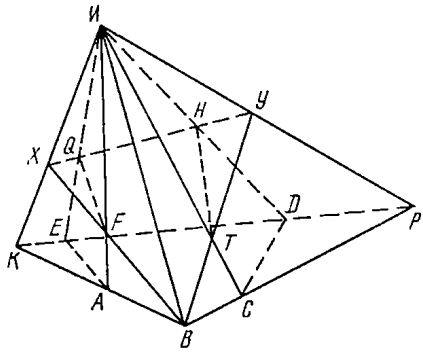


Рис. 94

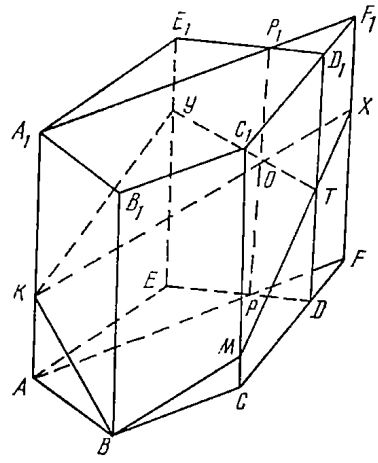


Рис. 95

Задача 4. Дано изображение призмы $ABCDEA_1B_1C_1D_1E_1$ (рис. 95). Точка $K \in [AA_1]$, $M \in [CC_1]$. Построить сечение призмы плоскостью KBM.

Через (AA_1) проводим плоскость Π, параллельную грани BCC_1B_1. Получаем $P = (ED) \cap \Pi$, $P_1 = (E_1D_1) \cap \Pi$, $F = (CD) \cap \Pi$, $F_1 = (C_1D_1) \cap \Pi$. Так как Π параллельна грани BCC_1B_1, то секущая плоскость KBM пересекает Π по прямой $(KX) \parallel (BM)$, $X \in (FF_1)$. Получаем $O = (PP_1) \cap (KX)$, $T = (MX) \cap (DD_1)$, $Y = (EE_1) \cap (TO)$. Пятиугольник $KBMTY$ — искомое сечение.

Упражнения

1. Точки M, K, P, H — середины ребер $[AD]$, $[DC]$, $[BC]$, $[AB]$ пирамиды $DABC$. Принадлежат ли точки M, K, P, H одной плоскости? Определить, как зависит вид четырехугольника $MKPH$ от вида пирамиды $DABC$.

2. Даны две скрещивающиеся прямые. Доказать, что есть только одна пара параллельных плоскостей, каждая из которых проходит через одну из данных прямых.

3. Лежат ли в одной плоскости середины отрезков, концы которых принадлежат двум скрещивающимся прямым?

4. Вершина k-угольной пирамиды одинаково удалена от вершин ее основания. Каким свойством обладает основание высоты пирамиды?

5. Апофемы боковых граней k-угольной пирамиды конгруэнтны. Каким свойством обладает основание пирамиды? Каково свойство основания высоты пирамиды?

6. Отрезки $[OA]$, $[OB]$, $[OC]$ не лежат в одной плоскости. Углы AOB и AOC острые и конгруэнтные. Доказать, что ортогональная проекция $[OA)$ на плоскость BOC — биссектриса угла BOC.

7. Точка M лежит внутри пирамиды $DABC$. Точки M_1 и M_2 — ортогональные проекции M на плоскости ABC и BCD. Доказать, что прямые (M_1M_2) и (BC) перпендикулярны.

8. Каким свойством обладает множество точек, одинаково удаленных от граней данного двугранного угла?

9. Плоские углы при вершине D пирамиды $DABC$ прямые. Доказать, что основание O высоты $[DO]$ пирамиды совпадает с точкой пересечения высот треугольника ABC.

10. Можно ли куб пересечь плоскостью так, чтобы в сечении получился правильный пятиугольник?

11. Доказать, что плоскости, проходящие через середины ребер треугольной пирамиды и перпендикулярные им, пересекаются в одной точке. Каково свойство этой точки?

12. Точки O_1, O_2, O_3, O_4 — центры окружностей, описанных около граней ABC, BCD, ACD, ABD пирамиды $DABC$. Через эти точки проходят прямые, перпендикулярные соответствующим граням пирамиды. Доказать, что эти прямые пересекаются в одной точке O. Чем служит точка O для пирамиды?

13. Доказать, что есть точка O, одинаково удаленная от всех граней треугольной пирамиды. Каково свойство плоскости, проходящей через точку O и ребро этой пирамиды?

14. Середина M высоты $[DO]$ правильного тетраэдра $DABC$ соединена отрезками с вершинами основания ABC. Доказать, что эти отрезки взаимно перпендикулярны.

15. Доказать, что множество вершин D прямых трехгранных углов, касающихся данной шаровой поверхности, образуют шаровую поверхность, концентрическую данной.

16. Около какой четырехугольной призмы можно описать шар?

17. В какую треугольную призму можно вписать шар?

18. Двугранные углы при основании пирамиды равны. Можно ли в такую пирамиду вписать шар?

19. Есть ли такая правильная четырехугольная пирамида, у которой совпадают центры вписанного и описанного шара?

20. На параллельных плоскостях лежат отрезки $[AB]$ и $[CD]$. Их концы являются вершинами некоторой пирамиды. Доказать, что ее объем не изменяется, если отрезки перемещать в этих плоскостях параллельно самим себе.

21. Доказать, что биссекторная плоскость двугранного угла AB пирамиды $DABC$ делит ребро в отношении, равном отношению площадей граней, образующих этот угол.

22. Плоскость α проходит через середины M и K ребер $[AB]$ и $[CD]$ пирамиды $DABC$. Найти, в каком отношении она делит объем этой пирамиды.

23. Доказать, что три плоскости, каждая из которых проходит через ребро трехгранного угла $OABC$ и перпендикулярна к противоположной грани, имеют одну общую прямую.

24. Рассмотрим следующие свойства треугольной пирамиды: 1) все грани равновелики; 2) каждое ребро конгруэнтно противоположному; 3) все грани конгруэнтны; 4) центры описанной и вписанной сфер совпадают; 5) суммы величин плоских углов при каждой вершине тетраэдра равны. Доказать, что все эти свойства эквивалентны.

25. Построить изображение куба, одно из диагональных сечений которого параллельно плоскости чертежа.

26. Построить изображение правильного шестиугольника и центра вписанного в него круга.

27. Построить изображение равнобочной трапеции, диагонали которой точкой пересечения делятся в отношении 1 : 2.

28. Дано изображение прямоугольного треугольника ABC, катеты $[AC]$ и $[CB]$ которого относятся как 1 : 2. Построить изображение биссектрисы $[CK)$ его прямого угла.

29. Дано изображение квадрата $ABCD$. Через точку M диагонали $[AC]$ проходит прямая $p \perp (AC)$ и лежащая в плоскости ABC. Построить изображение прямой p.

30. Дано изображение прямоугольного треугольника ABC, катеты $[AC]$ и $[CB]$ которого относятся как 1 : 3. Построить изображение его высоты $[CH]$, проведенной к гипотенузе.

31. Дано изображение прямоугольного треугольника ABC. Катеты его относятся как 1 : 2. Построить изображение прямой p, лежащей в плоскости ABC, проходящей через середину O его гипотенузы и перпендикулярной к ней.

32. Дано изображение равнобедренного треугольника ABC, боковая сторона $[AB]$ которого в 2 раза больше основания $[AC]$. Построить изображение его высот $[BH]$ и $[AK]$.

33. Дано изображение треугольника ABC, у которого $|AB| : |BC| : |CA| = 2 : 4 : 5$. Построить изображение его высоты $[BH]$, проведенной к стороне $[AC]$.

34. Дано изображение равнобедренного треугольника ABC ($|AC|$ — основание). Стороны его относятся как 5 : 12. Построить изображение центра O вписанного в него круга.

35. Дано изображение равнобедренного треугольника, боковая сторона которого относится к основанию как 4 : 7. Построить изображение центра описанного вокруг него круга.

36. Дано изображение куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Точка K принадлежит ребру $[BB_1]$ и $|BK| : |KB_1| = 1 : 2$. Точка M — середина ребра $[DD_1]$. Построить сечение куба плоскостью AMK.

37. Дано изображение куба AD_1. Плоскость P проходит через середины ребер $[AB]$ и $[BC]$ и параллельна прямой (D_1B). Построить сечение куба плоскостью P.

38. Дано изображение правильной четырехугольной пирамиды $MABCD$. Построить ее сечение плоскостью, проходящей через середины ребер $[AB]$ и $[BC]$ и параллельной ребру $[DM]$.

39. Дана правильная четырехугольная пирамида $MABCD$, боковое ребро $[AM]$ которой в два раза больше диагонали $[AC]$ ее основания $ABCD$. Диагональное сечение AMC ее параллельно плоскости чертежа. Построить изображение этой пирамиды.

40. На грани ABB_1A_1 куба AD_1 даны точки M и K. На изображении куба построить точку X пересечения прямой (MK) с плоскостью грани $ABCD$ этого куба.

41. На ребрах $[AA_1]$ и $[C_1D_1]$ куба AD_1 даны точки M и K. На его изображении построить точку $X = (MK) \cap$ пл. (ABC).

42. Дано изображение куба AD_1. Построить точку $X = (A_1C) \cap$ пл. (DBB_1).

43. Дано изображение куба AD_1, M — середина $[D_1B]$, K делит $[AA_1]$ в отношении 1 : 3. Построить $X = (MK) \cap$ пл. (ABC).

44. Дано изображение пирамиды $DABC$. На ребрах $[AD]$, $[BD]$, $[CD]$ даны точки M, K, P. Построить $p = \text{пл. } (MKP) \cap \text{пл. } (ABC)$.

45. На гранях DAB и BCD пирамиды $DABC$ даны точки M и K. На изображении пирамиды построить $X = (MK) \cap \text{пл. } (DAC)$.

46. Дан куб AD_1. Точки M и K расположены на ребрах $[AA_1]$ и $[BB_1]$, точка P — на грани DCC_1D_1. Построить прямую пересечения плоскостей MKP и ABC.

47. Дан куб AD_1. На прямой (B_1D) и плоскости ABC построить точки X и Y, симметричные относительно точки C_1.

48. Через середину M ребра $[AB]$ куба AD_1 проходит прямая p, параллельная прямой (D_1B). Построить вторую точку пересечения прямой p с поверхностью куба.

49. Дана правильная пирамида $MABCD$. Через середины K и P ребер $[AD]$ и $[DC]$ проходит плоскость, параллельная (BM). Построить точку X, в которой ребро $[MD]$ пересекает плоскость KPX.

50. Дано изображение правильной пирамиды $MABCD$. Через середину K апофемы $[ME]$ боковой грани ADM проходит прямая p, параллельная плоскости CDM и пересекающая прямую (CA). Построить точку X пересечения p с плоскостью CDM.

51. Дан куб AD_1. Построить отрезок $[XY]$ так, чтобы он был параллелен прямой (CK) (K — середина $[B_1C_1]$), конгруэнтен половине $[CK]$ и чтобы его концы лежали на прямой (AB_1) и плоскости ABC.

52. Дан куб AD_1. Точка M — середина $[AA_1]$. Через середину K ребра $[A_1B_1]$ провести прямую p, пересекающую прямые (MC) и (DB_1).

53. Дан куб AD_1. Построить отрезок $[B_1X]$, концы которого лежат в точке B_1 и на прямой (A_1D) и который плоскостью AD_1K (K — середина $[B_1C_1]$) делится пополам.

54. Дан куб AD_1. Построить прямую p, пересекающую прямые (A_1C_1) и (B_1D) и параллельную прямой (BK) (K — середина $[CC_1]$).

55. Дано изображение правильной пирамиды $DABC$. Через точку E ребра AB в плоскости ABM (M — середина $[CD]$) проходит прямая $p \perp (AB)$. Построить точку X пересечения p с боковой поверхностью пирамиды.

56. Дан куб AD_1. Из вершины A опустить перпендикуляр $[AX]$ на прямую (B_1D). Построить сечение куба плоскостью, проходящей через A и перпендикулярной к прямой (B_1D).

57. Дан куб AD_1. Из вершины D опустить перпендикуляр $[DX]$ на прямую (AM) (M — середина ребра $[CC_1]$).

58. Боковое ребро правильной пирамиды $DABC$ в 2 раза больше стороны основания ABC. Через (AB) провести сечение ABX, перпендикулярное к боковому ребру $[CD]$.

59. Дана правильная пирамида $MABCD$. В плоскости ее основания $ABCD$ через A провести прямую p, перпендикулярную (AM).

60. Дан правильный тетраэдр $DABC$. Точка M лежит внутри грани ABD. Опустить перпендикуляр $[MH]$ на плоскость BCD.

61. Дан куб AD_1. Из вершины D_1 опустить перпендикуляр $[D_1H]$ на плоскость DA_1C_1.

62. Дан куб AD_1. Построить линейные углы двугранных углов, образованных плоскостями ACB_1 и B_1D_1D.

63. Дано изображение правильной пирамиды $MABCD$. Боковое ребро $[AM]$ конгруэнтно стороне $[AB]$ основания. Построить линейный угол двугранного угла, образованного плоскостями CDM и DBK (K — середина $[MC]$).

64. Дан куб AD_1. M — середина $[AA_1]$. Через M провести сечение, перпендикулярное к прямой (DP) (P — середина $[C_1D_1]$).

65. Дан куб AD_1. Через середину M ребра $[AD]$ и точку K (K делит ребро $[AB]$ в отношении $3:1$, считая от A) проходит плоскость Π, которая

образует с гранью $ABCD$ двугранный угол 60°. Построить на изображении куба точку X пересечения плоскости П с отрезком $[AA_1]$.

66. Сторона основания правильной пирамиды $MABCD$ в 2 раза меньше бокового ребра. Через сторону $[AB]$ основания $ABCD$ пирамиды проходит плоскость П, перпендикулярная грани CDM. Построить отрезок $[XY] =$ пл. П $\cap$ грань CDM.

67. Дан куб AD_1. Опустить перпендикуляр $[AX]$ на плоскость BDO (O — центр грани BCC_1B_1).

68. Дан куб AD_1. Прямая p, перпендикулярная плоскости BDM (M — середина ребра $[AA_1]$), проходит через середину E отрезка $[BD]$. Построить точку X, в которой p пересекает боковую поверхность куба.

69. Дан куб AD_1. Точка M — середина $[AA_1]$, K делит $[AB]$ в отношении 3 : 1, считая от A. Опустить перпендикуляр из A на плоскость DMK.

70. Боковое ребро правильной пирамиды $MABCD$ конгруэнтно стороне основания. Построить общий перпендикуляр $[XY]$ к прямым (BC) и (DM) ($X \in (BC)$, $Y \in (DM)$).

71. Дан куб AD_1. Построить общий перпендикуляр к прямым (AD_1) и (BM) (M — середина ребра $[CC_1]$).

72. Дан куб AD_1. Построить общий перпендикуляр к прямым (A_1C) и (AE) (E — середина ребра $[BC]$).

73. Дан куб AD_1. На плоскости ABC построить прямую p, которая проходит через середину M ребра $[CD]$ и образует угол 45° с прямой (B_1D).

§ 4. Алгебраический метод решения геометрических задач

О составлении уравнений по условию задач

Алгебраический способ решения геометрических задач заключается в следующем. Искомые элементы геометрической фигуры обозначают через x, y, ... По условию задачи составляются уравнения (неравенства), связывающие известные и неизвестные элементы этой фигуры. После этого решается полученная система уравнений (неравенств). Определяются те элементы или отношения между ними, которые требуется найти. В идейном отношении такое решение геометрических задач является одним из наиболее простых. Метод уравнений применим к широкому кругу задач. Удачный выбор неизвестных позволяет получить несложную систему уравнений (неравенств).

Задача 1. Основанием прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ является прямоугольный треугольник ABC. Длина его катетов: $|AC| = b$, $|CB| = a\,(b < a)$. Некоторая плоскость пересекает все боковые ребра призмы в точках A, B_0, C_0 так, что в сечении получается правильный треугольник AB_0C_0. Определить стороны этого треугольника. Установить, какой должна быть высота призмы, чтобы задача имела решение.

Пусть треугольник AB_0C_0 — искомое сечение (рис. 96). Обозначим $|CC_0| = x$, $|BB_0| = y$. Отрезки $[AC]$ и $[AB]$ являются ортого-

нальными проекциями отрезков $[AC_0]$ и $[AB_0]$ на плоскость ABC. Но $|AB| = \sqrt{a^2 + b^2} > b$. Поэтому $x > y > 0$. Из прямоугольных треугольников ACC_0, ABB_0 и трапеции BCC_0B_0 находим:

$$|AC_0|^2 = b^2 + x^2, \tag{1}$$

$$|AB_0|^2 = a^2 + b^2 + y^2, \tag{2}$$

$$|C_0B_0|^2 = a^2 + (x - y)^2. \tag{3}$$

По условию задачи $|AC_0| = |AB_0| = |B_0C_0|$. Поэтому из равенств (1)—(3) получаем систему уравнений для определения x и y:

$$a^2 + b^2 + y^2 = a^2 + (x - y)^2, \quad a^2 + b^2 + y^2 = b^2 + x^2.$$

После очевидных преобразований эта система уравнений принимает вид:

$$x^2 - 2xy = b^2, \tag{4}$$

$$a^2 = x^2 - y^2. \tag{5}$$

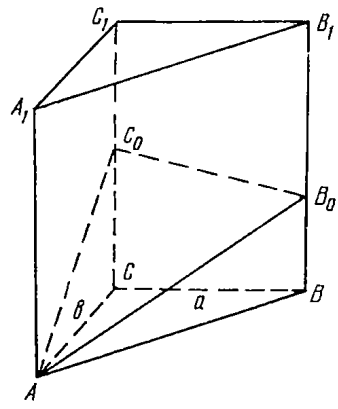


Рис. 96.

Выразив y из уравнения (4) и подставив его значение в уравнение (5), имеем

$$a^2 = 0{,}75x^2 + 0{,}5b^2 - 0{,}25b^4 : x^2$$

или

$$3x^4 + 2x^2(b^2 - 2a^2) - b^4 = 0.$$

Теперь уже ясно, что выбор неизвестных оказался неудачным. Получение ответа на вопрос задачи оказалось связанным с достаточно громоздкими тождественными преобразованиями. Поэтому вернемся к началу решения и обозначим через x длины $|AC_0|$, $|C_0B_0|$, $|AB_0|$.

Из прямоугольных треугольников ACC_0 и ABB_0 имеем

$$|CC_0| = \sqrt{x^2 - b^2}, \tag{6}$$

$$|BB_0| = \sqrt{x^2 - a^2 - b^2}. \tag{7}$$

Из прямоугольной трапеции C_0CBB_0 получаем

$$|C_0B_0|^2 = x^2 = a^2 + (|CC_0| - |BB_0|)^2. \tag{8}$$

Из равенств (6)—(8) следует

$$x^2 = a^2 + [\sqrt{x^2 - b^2} - \sqrt{x^2 - a^2 - b^2}]^2.$$

Это иррациональное относительно x^2 уравнение преобразуется к такому:

$$3x^4 - 4x^2(a^2 + b^2) + 4a^2b^2 = 0. \tag{9}$$

Решив его относительно x^2, находим

$$x^2 = \frac{2}{3}[a^2 + b^2 \pm \sqrt{a^4 - a^2b^2 + b^4}].$$

Так как подкоренное выражение положительно при всех a и b и оно меньше, чем $a^2 + b^2$, то уравнение (9) имеет два положительных решения. Но и по условию задачи $x^2 \geqslant a^2 + b^2$. Поэтому задача может иметь только одно решение:

$$x = \sqrt{\frac{2}{3}[a^2 + b^2 + \sqrt{a^4 - a^2b^2 + b^4}]}.$$

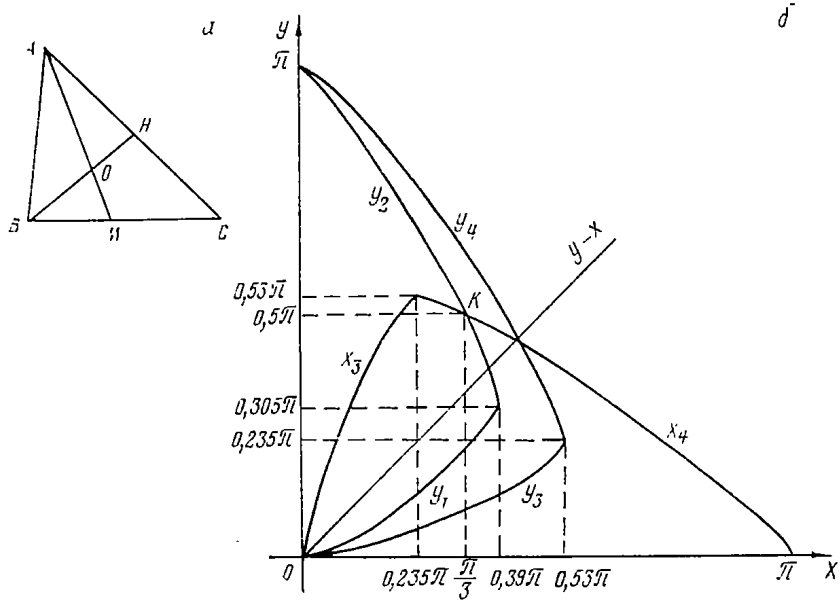


Рис. 97

Обозначим высоту пирамиды через h. Чтобы задача имела решение, очевидно, должно выполняться условие $x^2 < b^2 + h^2$, или

$$h^2 > x^2 - b^2 = \frac{2}{3}[a^2 + \sqrt{a^4 - a^2b^2 + b^4}] - \frac{b^2}{3}.$$

Задача 2. Биссектрисы $[AM]$ и $[BH]$ треугольника ABC пересекаются в точке O. Известно, что $|AO| = \sqrt{3}|MO|$, $|HO| = (\sqrt{3} - 1)|BO|$. Определить углы треугольника ABC.

Решим эту задачу двумя способами.

Способ 1. Пусть $|AB| = a$, $\hat{BAC} = x$, $\hat{ABC} = y$ (рис. 97, *а*).

На основании свойства биссектрисы внутреннего угла треугольника и по теореме синусов имеем

$$|AH| = |AB| \cdot |HO| : |BO| = a(\sqrt{3} - 1) = a \sin \frac{y}{2} : \sin\left(x + \frac{y}{2}\right).$$

Аналогичным образом из треугольника ABM получаем

$$|BM| = a : \sqrt{3} = a \sin \frac{x}{2} : \sin\left(\frac{x}{2} + y\right).$$

Таким образом, для определения углов x, y получена система уравнений

$$\left.\begin{aligned} \sin\left(\frac{x}{2} + y\right) &= \sqrt{3} \sin \frac{x}{2}, \\ (\sqrt{3} - 1) \sin\left(x + \frac{y}{2}\right) &= \sin \frac{y}{2}. \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

Эта система достаточно сложна. Ее решение связано с громоздкими искусственными преобразованиями. Поэтому решим ее графически.

Выразив y из первого уравнения, получаем

$$y_1 = \arcsin\left(\sqrt{3} \sin \frac{x}{2}\right) - \frac{x}{2} \text{ или } y_2 = \pi - \arcsin\left(\sqrt{3} \sin \frac{x}{2}\right) - \frac{x}{2}.$$

Из второго уравнения находим

$$x_3 = \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{3} - 1} \sin \frac{y}{2}\right) - \frac{y}{2} \text{ или}$$

$$x_4 = \pi - \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{3} - 1} \sin \frac{y}{2}\right) - \frac{y}{2}.$$

Так как x и y — углы треугольника, то

$$0 < \sqrt{3} \sin \frac{x}{2} \leqslant 1, \text{ т. е. } 0 < x \leqslant 2 \arcsin \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0{,}39\pi.$$

$$0 < \frac{1}{\sqrt{3} - 1} \sin \frac{y}{2} \leqslant 1, \text{ т. е. } 0 < y \leqslant 2 \arcsin(\sqrt{3} - 1) \approx 0{,}53\pi.$$

Очевидно, функция y_2 — монотонно убывающая на $(0;\ 0{,}39\pi)$. При помощи производной легко устанавливается, что на $(0;\ 0{,}39\pi)$ функция y_1 монотонно возрастающая. Их графики показаны на рис. 97, *б*.

Рассмотрим функции y_3 и y_4, обратные функциям x_3 и x_4:

$$y_3 = \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{3}-1}\sin\frac{x}{2}\right) - \frac{x}{2};$$

$$y_4 = \pi - \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{3}-1}\sin\frac{x}{2}\right) - \frac{x}{2}.$$

Эти функции определены на $(0;\ 0{,}53\pi)$. Функция y_4 на этом интервале монотонно убывает, y_3 — возрастает (рис. 97,*б*). Отразив графики этих функций относительно прямой $y = x$, получаем графики функций x_3 и x_4. Из построенных графиков видно, что решением системы уравнений (10), удовлетворяющих условию задачи, являются координаты только точки K, в которой пересекаются графики x_4 и y_2.

Получаем $x \approx \frac{\pi}{3}$, $y \approx \frac{\pi}{2}$. Подставив эти значения x и y в систему (10), убеждаемся, что $\left(\frac{\pi}{3};\ \frac{\pi}{2}\right)$ действительно является ее решением. Следовательно, $x = 60°$, $y = 90°$.

Способ 2. Обозначим: $|AB| = x$, $|BC| = y$, $|AC| = z$ (рис. 97, *а*). Из треугольников ABM и ABH по свойству биссектрисы внутреннего угла треугольника находим:

$$|BM| : |AB| = |MO| : |AO| = 1 : \sqrt{3};$$
$$|AH| : |BA| = |HO| : |BO| = \sqrt{3} - 1.$$

Отсюда получаем $|BM| = x : \sqrt{3}$; $|AH| = x(\sqrt{3} - 1)$. Из треугольника ABC находим

$$|AH| : |CH| = |AB| : |BC|,\ |BM| : |CM| = |AB| : |AC|.$$

Таким образом, получаем систему уравнений

$$x(\sqrt{3} - 1) : [z - x(\sqrt{3} - 1)] = x : y;\ x : (y\sqrt{3} - x) = x : z.$$

Отсюда $y = x\sqrt{3}$, $z = 2x$. Очевидно, $x^2 + y^2 = x : z$. По теореме, обратной теореме Пифагора, можно утверждать, что $\overset{\wedge}{ABC} = 90°$. После этого легко определить величину и остальных углов треугольника ACB.

Задача 3. Определить длину биссектрисы $[CD]$ угла C треугольника ACB, если $|AC| = b$, $|BC| = a$, $\overset{\wedge}{ACB} = 2\alpha$.

При решении этой задачи используем способ, который заключается в сравнении различных выражений для площади треугольника. Этот подход при решении геометрических задач составлением уравнений называют *методом площадей*.

Применив к определению площадей треугольников ACD, DCB и ACB формулу $S = 0{,}5\,ab\sin\hat{C}$, получаем (рис. 98):

$$S_{ACD} = 0{,}5\,|CD|\,b\sin\alpha;\quad S_{DCB} = 0{,}5\,|CD|\,a\sin\alpha;$$
$$S_{ACB} = 0{,}5\,ab\sin 2\alpha.\ \text{Но}\ S_{ACD} + S_{DCB} = S_{ACB}.$$

Поэтому

$$0{,}5\,|CD|\,b\sin\alpha + 0{,}5\,|CD|\,a\sin\alpha = 0{,}5\,ba\sin 2\alpha.$$

Отсюда

$$|CD| = \frac{2ab\cos\alpha}{a+b}.$$

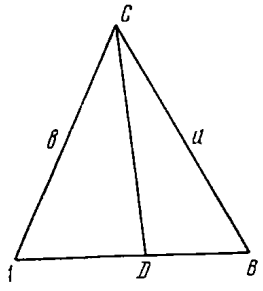


Рис. 98

Упражнения

Применив различные формулы площадей треугольника

$$S = 0{,}5ah_a;\ S = 0{,}5ab\sin\hat{C};\ S = \frac{abc}{4R};\ S = \frac{a^2\sin\hat{B}\sin\hat{C}}{2\sin\hat{A}};$$
$$S = pr;\quad S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

решить задачи 1—4.

1. Определить одну из медиан треугольника, зная его стороны.

2. Доказать, что в любом треугольнике $\frac{1}{r} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}$.

3. Площадь треугольника ABC равна 16, длина медианы $|AM| = 6$, медианы $|BK| = 4$. Доказать, что эти медианы перпендикулярны.

4. Основанием $ABCD$ прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ служит ромб со стороной a и острым углом α, высота призмы равна b. Определить расстояние от вершины B_1 до диагонали $[A_1D]$ боковой грани ADD_1A_1.

5. Ребро правильного тетраэдра $ABCD$ равно a. Определить радиус сферы, проходящей через вершины A, B, центр грани ACD и середину ребра $[BC]$.

6. В окружность вписан треугольник ABC. Расстояния от точек A и C до прямой, касающейся окружности в точке B, равны a и c соответственно. Определить высоту треугольника ABC, проведенную из вершины B.

7. В остроугольном треугольнике две высоты равны соответственно 3 и $2\sqrt{2}$, а точка их пересечения делит третью высоту в отношении 5 : 1, считая от вершины треугольника. Определить площадь треугольника.

8. В правильной четырехугольной пирамиде $MABCD$ высота равна диагонали основания $ABCD$. Через вершину A параллельно прямой (BD) проведена плоскость, касающаяся вписанного в пирамиду шара. Определить отношение площади сечения к площади основания пирамиды.

§ 5. Векторное решение геометрических задач

Примеры решения задач векторным способом

Новая школьная программа по математике предполагает изучение учащимися восьмилетней и средней школы ряда важных понятий векторной алгебры и основных свойств скалярного произведения векторов. В частности, учащиеся будут знакомиться с формулой

$$\vec{OB} = \frac{1}{n+m}[m\vec{OA} + n\vec{OC}], \qquad (1)$$

где точки A, B и C принадлежат одной прямой и $|AB| : |BC| = n : m$ (рис. 99). На конкретных примерах покажем, как применение векторной алгебры упрощает решение многих достаточно сложных задач элементарной геометрии.

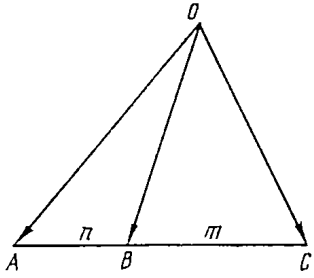


Рис. 99

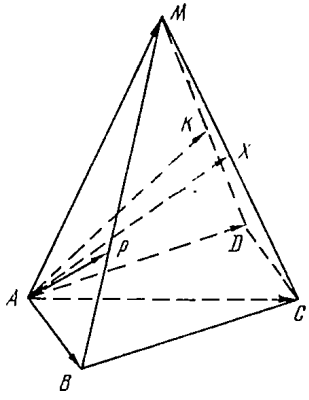


Рис. 100

Задача 1. У правильной четырехугольной пирамиды $MABCD$ (рис. 100) все ребра равны единице. Точка K — середина бокового ребра $[MD]$, точка P делит ребро $[BM]$ в отношении $1:3$, считая от вершины B. Определить, в каком отношении плоскость AKP делит ребро $[MC]$.

Пусть X — точка встречи плоскости AKP с прямой (MC) и $|MX| : |XC| = x : y$. Введем в рассмотрение векторы $\vec{AB}$, $\vec{AD}$, $\vec{AM}$, $\vec{AK}$, $\vec{AP}$, $\vec{AX}$, $\vec{AC}$. Так как известны длины ребер $[AB]$, $[AD]$, $[AM]$ и углы между ними (четырехугольник $ABCD$ — квадрат, все боковые грани — равносторонние треугольники), то некомпланарные

векторы $\vec{AB}$, $\vec{AD}$ и $\vec{AM}$ однозначно определяют пирамиду $MABCD$. Следовательно, через эти векторы можно однозначно выразить векторы $\vec{AK}$, $\vec{AP}$ и $\vec{AX}$. По условию задачи векторы $\vec{AK}$, $\vec{AP}$ и $\vec{AX}$ компланарны. Поэтому

$$\vec{AX} = k\vec{AK} + p\vec{AP}, \tag{2}$$

где k и p — неизвестные числа.

С другой стороны, точка X принадлежит ребру MC. Поэтому на основании формулы (1) можно записать

$$\vec{AX} = \frac{1}{x+y}[y\vec{AM} + x\vec{AC}]. \tag{3}$$

Но так как $|MX| + |XC| = 1$, то $y:(x+y) = 1-x$, $x:(x+y) = x$. Поэтому равенство (3) можно записать таким образом:

$$\vec{AX} = (1-x)\vec{AM} + x\vec{AC}. \tag{4}$$

Из равенств (2) и (4)

$$k\vec{AK} + p\vec{AP} = (1-x)\vec{AM} + x\vec{AC}. \tag{5}$$

Выразим теперь векторы $\vec{AK}$, $\vec{AP}$ и $\vec{AC}$ через векторы $\vec{AM}$, $\vec{AD}$, $\vec{AB}$. Применив к векторам $\vec{AM}$, $\vec{AK}$, $\vec{AD}$ формулу (1), находим

$$\vec{AK} = 0{,}5\,(\vec{AM} + \vec{AD}). \tag{6}$$

Отрезок $[AC]$ является диагональю квадрата (параллелограмма) $ABCD$. Поэтому

$$\vec{AC} = \vec{AD} + \vec{AB}. \tag{7}$$

Наконец, применив формулу (1) к векторам $\vec{AB}$, $\vec{AP}$, $\vec{AM}$, имеем

$$\vec{AP} = 0{,}25\,(3\,\vec{AB} + \vec{AM}). \tag{8}$$

Использовав равенства (6)—(8), приводим уравнение (5) к виду:

$k[0{,}5\,(\vec{AM} + \vec{AD})] = p[0{,}25\,(3\,\vec{AB} + \vec{AM})] = (1-x)\,\vec{AM} + x\,(\vec{AD} + \vec{AB})$

или, после приведения подобных членов,

$$(0{,}5k + 0{,}25p - 1 + x)\,\vec{AM} + (0{,}5k - x)\,\vec{AD} + (0{,}75p - x)\,\vec{AB} = 0.$$

Векторы $\vec{AM}$, $\vec{AD}$, $\vec{AB}$ некомпланарны. Поэтому последнее равенство возможно только в том случае, если коэффициенты при этих векторах равны нулю. Таким образом, для определения x получаем систему линейных уравнений относительно k, p, x:

$$0{,}5k + 0{,}25p - 1 + x = 0;\ 0{,}5k - x = 0;\ 0{,}75p - x = 0.$$

Решив эту систему, находим $x = 3:7$. Таким образом, $|MX|:|XC| = 3:4$.

Задача 2. Основанием прямого параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 101) является ромб $ABCD$ со стороной, равной 1, и острым углом $\hat{A} = 60°$; $|AA_1| = 4$. Плоскость α проходит через точку $O \in [AC_1]$ ($|AO|:|OC_1| = 1:2$) и перпендикулярна этой диагонали. Определить длину отрезка $[BX]$, если $X = \alpha \cap (BB_1)$.

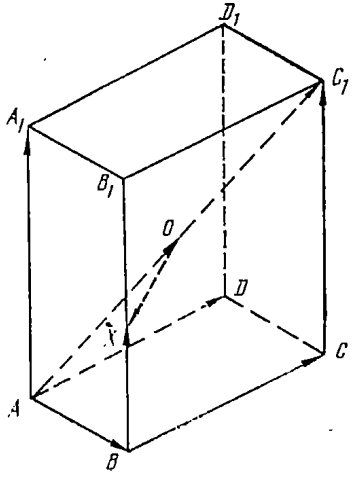


Рис. 101

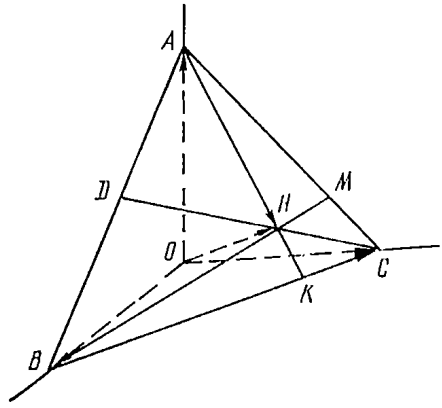


Рис. 102

Очевидно, векторы $\vec{AD}$, $\vec{AB}$, $\vec{AA_1}$ однозначно определяют параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, так как известны их модули и углы между ними. Кроме того, введем в рассмотрение векторы $\vec{AC}$, $\vec{AO}$, $\vec{OX}$, $\vec{BX}$. Так как плоскость $\alpha \perp (AC_1)$, то прямые (AC_1) и (OX) также перпендикулярны, т. е.

$$\vec{AC_1} \cdot \vec{OX} = 0. \tag{9}$$

Таким образом, задача свелась к решению уравнения (9). Выразим вектор $\vec{AC_1}$ через векторы $\vec{AA_1}$, $\vec{AB}$ и $\vec{AD}$:

$$\vec{AC_1} = \vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CC_1} = \vec{AB} + \vec{AD} + \vec{AA_1}.$$

Очевидно, $\vec{AO} + \vec{OX} = \vec{AB} + \vec{BX}$. Отсюда $\vec{OX} = \vec{AB} + \vec{BX} - \vec{AO} = \vec{AB} + \vec{BX} - \frac{1}{3} \cdot \vec{AC_1} = \vec{AB} + \vec{BX} - \frac{1}{3}(\vec{AB} + \vec{AD} + \vec{AA_1}) =$

$= \frac{2}{3}\vec{AB} - \frac{1}{3}\vec{AD} - \frac{1}{3}\vec{AA_1} + \vec{BX}$. Теперь равенство (9) можно переписать так:

$$(\vec{AB} + \vec{AD} + \vec{AA_1})\left(\frac{2}{3}\vec{AB} - \frac{1}{3}\vec{AD} - \frac{1}{3}\vec{AA_1} + \vec{BX}\right) = 0. \quad (10)$$

Раскрыв скобки в уравнении (10) и учитывая, что скалярное произведение ортогональных векторов равно нулю, имеем

$$\frac{2}{3}\vec{AB}^2 - \frac{1}{3}|\vec{AB}| \cdot |\vec{AD}| \cos 60° + \frac{2}{3}|\vec{AD}| \cdot |\vec{AB}| \cos 60° -$$
$$- \frac{1}{3}\vec{AD}^2 - \frac{1}{3}\vec{AA_1}^2 + |\vec{AA_1}| \cdot |\vec{BX}| \cos 0° = 0. \quad (11)$$

Так как $|\vec{AB}| = |\vec{AD}| = 1$, $|\vec{AA_1}| = 4$, то в уравнении (11) неизвестна только длина отрезка $[BX]$. Решив уравнение (11) относительно $|BX|$, получаем $|BX| = 29 : 24$.

Задача 3. В трехгранном угле с вершиной O все плоские углы прямые. Плоскость α пересекает его ребра в точках A, B и C. Доказать, что основание H перпендикуляра, опущенного из O на плоскость α, является точкой пересечения высот треугольника ABC.

Итак, нам нужно доказать, что прямые (AH) и (BC), (BH) и (AC), (CH) и (AB) взаимно перпендикулярны. Введем в рассмотрение векторы $\vec{OH}$, $\vec{AH}$, $\vec{BC}$, $\vec{OA}$, $\vec{OB}$, $\vec{OC}$ (рис. 102). Для доказательства перпендикулярности прямых (AH) и (BC) достаточно показать, что $\vec{AH} \cdot \vec{BC} = 0$. Очевидно, $\vec{AH} = \vec{OH} - \vec{OA}$, $\vec{BC} = \vec{OC} - \vec{OB}$. Поэтому $\vec{AH} \cdot \vec{BC} = (\vec{OH} - \vec{OA})(\vec{OC} - \vec{OB}) = \vec{OH} \cdot \vec{OC} - \vec{OH} \cdot \vec{OB} - \vec{OA} \cdot \vec{OC} + \vec{OA} \cdot \vec{OB}$. Но по условию задачи $(OA) \perp (OC)$ и $(OA) \perp (OB)$. Поэтому $\vec{OA} \cdot \vec{OC} = 0$, $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = 0$. Тогда $\vec{AH} \cdot \vec{BC} = \vec{OH} \cdot \vec{OC} - \vec{OH} \cdot \vec{OB} = \vec{OH}(\vec{OC} - \vec{OB}) = \vec{OH} \cdot \vec{BC}$. По условию задачи $(OH) \perp \alpha$, поэтому $(OH) \perp (BC)$ и, следовательно, $\vec{OH} \cdot \vec{BC} = 0$.

Итак, $\vec{AH} \cdot \vec{BC} = 0$. Перпендикулярность прямых (AH) и (BC) доказана. Аналогично показывается перпендикулярность прямых (BH) и (AC), (CH) и (AB).

Упражнения

1. Доказать, что отрезки, соединяющие вершины треугольной пирамиды с точками пересечения медиан противоположных граней, пересекаются в одной точке и эта точка делит каждый из отрезков в отношении 3 : 1.

2. Доказать, что в трехгранном угле биссектрисы двух его плоских углов и биссектриса угла, смежного с третьим плоским углом, принадлежат одной плоскости.

3. На гипотенузе прямоугольного треугольника или на ее продолжении определить такую точку, чтобы прямая, соединяющая ее проекции на катеты, была перпендикулярна гипотенузе.

4. Основанием правильной четырехугольной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ является квадрат $ABCD$ со стороной, равной 2. Высота призмы равна 4. Прямая (XY) пересекает прямые (A_1B) и (B_1C) и перпендикулярна этим прямым. Определить, в каком отношении (внутренним или внешним образом) точки X и Y делят отрезки $[A_1B]$ и $[B_1C]$.

5. Основанием четырехугольной пирамиды $MABCD$ является ромб $ABCD$, у которого сторона равна 2, а острый угол $\hat{A} = 60^\circ$. Основанием высоты пирамиды является точка пересечения диагоналей ромба. Высота пирамиды равна 10. Плоскость Π проходит через вершину A и перпендикулярна к ребру $[MC]$. Определить, в каком отношении плоскость Π делит ребро $[MB]$.

6. У треугольной пирамиды $DABC$ плоские углы при вершине D прямые; $|AD| = 3$, $|AB| = 4$, $|DC| = 5$. Определить, чему равно расстояние между вершиной D и точкой пересечения медиан треугольника ABC.

§ 6. Решение задач элементарной геометрии методом координат

Примеры решения задач аналитическим способом

Метод координат упрощает поиски решения задач элементарной геометрии. При решении этих задач чаще всего используются уравнения: прямой, проходящей через две точки (через данную точку с данным угловым коэффициентом); окружности и сферы; плоскости (в отрезках); формула длины отрезка; условие перпендикулярности двух прямых. Объем вычислений зависит от того, насколько удачно расположена данная геометрическая фигура относительно прямоугольной системы координат.

Задача 1. Основанием четырехугольной пирамиды $MABCD$ является прямоугольник $ABCD$, у которого $|AB| = 3$, $|AD| = 4$, $|AM| = 2$, причем $[AM]$ перпендикулярен плоскости основания пирамиды. Плоскость P проходит через середину K ребра $[MC]$ и перпендикулярна к этому ребру. Плоскость P пересекает прямые (AB) и (AD) в точках X и Y. Определить длину отрезка $[XY]$.

Начало прямоугольной системы координат совместим с вершиной A пирамиды, направление координатных осей показано на рис. 103. В этой системе координат $M(0, 0, 2)$; $C(3, 4, 0)$. Составим уравнение плоскости P. Пусть $E(x, y, z)$ — произвольная точка P. Так как $|MK| = |KC|$, то в силу определения плоскости, перпендикулярной прямой, получаем $|EM| = |EC|$. Применив формулу расстояния между точками, находим

$$|EM|^2 = (x-0)^2 + (y-0)^2 + (z-2)^2;$$
$$|EC|^2 = (x-3)^2 + (y-4)^2 + (z-0)^2.$$

Так как $|EM| = |EC|$, то $x^2 + y^2 + (z-2)^2 = (x-3)^2 + (y-4)^2 + z^2$ или после упрощения имеем уравнение плоскости P

$$4z - 8y - 6x + 21 = 0. \qquad (1)$$

Точка X принадлежит оси абсцисс, поэтому $X(x_1, 0, 0)$. Для определения x_1 в уравнение (1) вместо y и z подставляем нули. Получаем $x_1 = 3{,}5$.

Точка Y принадлежит оси ординат. Поэтому $Y(0, y_1, 0)$. Для определения y_1 в уравнение (1) вместо x и z подставим нули. Получаем $y_1 = 2{,}625$. Итак, $|AX| = 3{,}5$; $|AY| = 2{,}625$. Применив теорему Пифагора к прямоугольному треугольнику XAY, находим $|XY| \approx 4{,}8$.

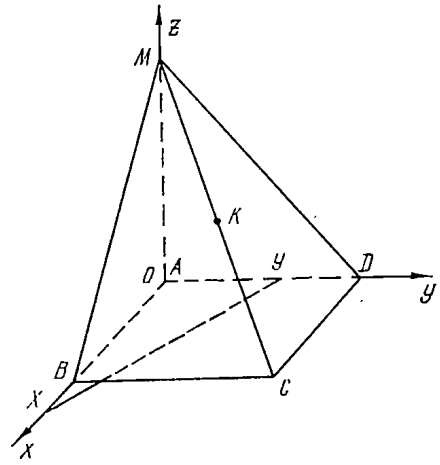


Рис. 103

Упражнения

1. Дана окружность с центром в точке O. Ее диаметр $|AB| = 4$. Точка C является серединой радиуса $[OB]$. Построить на окружности две точки X и Y, симметричные относительно (AB), для которых прямая $(YC) \perp (XA)$.

2. Три окружности, радиусы которых 2, 8 и 10 см, попарно касаются внешним образом. Найти длину хорды, отсекаемой третьей окружностью от общей внутренней касательной первых двух окружностей.

3. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, у которого $|AB| = 2$, $|BC| = 4$, $|BB_1| = 6$. Плоскость P проходит через середину O диагонали $[D_1B]$ и перпендикулярна ей. Найти отношение, в котором плоскость P делит отрезок $[A_1B_1]$ (внутренним или внешним образом).

4. Сторона основания правильной шестиугольной пирамиды $SABCDEF$ равна 4. Высота $|SO| = 6$. Найти расстояние между вершиной A и точкой пересечения медиан треугольника SCD.

5. У треугольника ABC $|AB| = 4$, $|BC| = 3$, $|AC| = \sqrt{3}$. Доказать, что медианы $[AK]$ и $[CM]$ треугольника ABC перпендикулярны.

6. У треугольной пирамиды $ABCD$ известны длины ее ребер: $|AB| = 8$, $|BC| = 5$, $|AD| = 3$, $|BD| = \sqrt{57}$, $|CD| = \sqrt{14}$. Определить высоту $|DH|$ этой пирамиды.

7. Внутри квадрата $ABCD$ взята произвольная точка P. Из вершины A опущен перпендикуляр на прямую (BP), из вершины B — на (CP), из C — на (DP), из D — на (AP). Доказать, что все четыре перпендикуляра (или их продолжения) пересекаются в одной точке.

§ 7. Многогранники и тела вращения

Определение величин элементов многогранников

Пусть S — площадь многоугольника M, S_0 — площадь его ортогональной проекции M_0; φ — угол, образованный плоскостями много-

угольника M и его проекции M_0. Тогда $S = S_0 : \cos\varphi$. Эта формула находит применение при определении площадей сечений многогранников и площадей их поверхностей.

На рис. 104 изображен прямоугольный трехгранный угол $OACB$, у которого $\angle AOC$ и $\angle BOC$ острые, а двугранный угол при ребре OC прямой. Обозначим $\hat{BOC} = \alpha$, $\hat{AOC} = \beta$, $\hat{AOB} = \gamma$, $(\hat{COA, AOB}) = \alpha_0$, $(\hat{COB, BOA}) = \beta_0$.

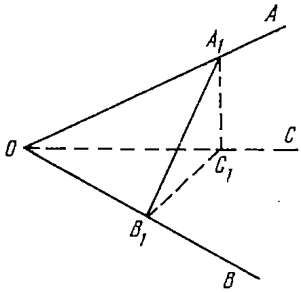


Рис. 104

Теорема

$$\cos\gamma = \cos\alpha\cos\beta \quad (А)$$

$$\sin\beta = \sin\gamma\sin\beta_0 \quad (Б)$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\gamma\cos\beta_0 \quad (В)$$

$$\operatorname{tg}\beta = \sin\alpha\operatorname{tg}\beta_0 \quad (Г)$$

$$\cos\alpha_0 = \cos\alpha\sin\beta_0 \quad (Д)$$

$$\cos\gamma = \operatorname{ctg}\alpha_0\operatorname{ctg}\beta_0 \quad (Е)$$

Доказательство. Отметим на $[OA)$ произвольную точку A_1. Пусть $|OA_1| = 1$. Строим $[A_1C_1] \perp [OC)$ и $[C_1B_1] \perp [OB)$. По условию теоремы $(\hat{AOC, COB}) = 90° \Rightarrow [A_1C_1] \perp (COB) \Rightarrow [A_1C_1] \perp [C_1B_1]$ и $[A_1C_1] \perp [OB_1]$. Итак, $[OB_1] \perp [B_1C_1]$ и $[OB_1] \perp [A_1C_1] \Rightarrow [OB_1] \perp (A_1B_1C_1) \Rightarrow [OB_1] \perp [A_1B_1]$. Теперь ясно, что $\hat{A_1B_1C_1} = \beta_0$. Получаем: $|B_1A_1| = |OA_1| \sin\gamma = \sin\gamma$ (из $\triangle OB_1A_1$); (1)

$$|OB_1| = |OA_1| \cos\gamma = \cos\gamma \text{ (из } \triangle OB_1A_1); \quad (2)$$

$$|A_1C_1| = |OA_1| \sin\beta = \sin\beta \text{ (из } \triangle OC_1A_1); \quad (3)$$

$$|OC_1| = |OA_1| \cos\beta = \cos\beta \text{ (из } \triangle OC_1A_1). \quad (4)$$

Из равенства (4) и $\triangle OB_1C_1$

$$|B_1C_1| = |CO_1| \sin\alpha = \cos\beta\sin\alpha. \quad (5)$$

1. Из $\triangle A_1C_1B_1$ и равенств (3) и (5)

$$\operatorname{tg}\beta_0 = |A_1C_1| : |B_1C_1| = \sin\beta : \cos\beta\sin\alpha = \operatorname{tg}\beta : \sin\alpha,$$

Отсюда следует справедливость равенства (Г).

2. Из $\triangle OB_1C_1$ и равенств (2) и (4) получаем: $|OB_1| = |OC_1| \cos\alpha$ и $\cos\gamma = \cos\beta \cos\alpha$. Этим доказана справедливость равенства (А).

3. Из $\triangle B_1C_1A_1$ и равенств (1) и (3) находим $\sin\beta_0 = |A_1C_1| : |B_1A_1| = \sin\beta : \sin\gamma$. Отсюда $\sin\beta = \sin\beta_0 \sin\gamma$. Равенство (Б) доказано.

4. Из $\triangle A_1C_1B_1$, $\triangle OB_1C_1$, $\triangle OB_1A_1$ следует

$$\cos\beta_0 = \frac{|B_1C_1|}{|B_1A_1|} = \frac{|OB_1| \operatorname{tg}\alpha}{|OB_1| \operatorname{tg}\gamma} = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\gamma}.$$

Отсюда $\operatorname{tg}\alpha = \cos\beta_0 \operatorname{tg}\gamma$. Равенство (В) доказано.

5. Из равенства (Г) получаем

$$\operatorname{tg}\beta_0 = \frac{\operatorname{tg}\beta}{\sin\alpha}. \tag{6}$$

Оно выражает $\operatorname{tg}\beta_0$ через $\operatorname{tg}\beta$ и $\sin\alpha$. Применив это равенство для выражения $\operatorname{tg}\alpha_0$, получим

$$\operatorname{tg}\alpha_0 = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sin\beta}. \tag{7}$$

Перемножим почленно равенства (6) и (7):

$$\operatorname{tg}\beta_0 \cdot \operatorname{tg}\alpha_0 = \frac{\operatorname{tg}\beta}{\sin\alpha} \cdot \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sin\beta} = \frac{\sin\beta}{\cos\beta \sin\alpha} \cdot \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha \sin\beta} = \frac{1}{\cos\beta \cos\alpha}.$$

Но $\cos\alpha \cos\beta = \cos\gamma$ (равенство (А). Поэтому

$$\operatorname{tg}\beta_0 \operatorname{tg}\alpha_0 = \frac{1}{\cos\gamma} \Rightarrow \cos\gamma = \operatorname{ctg}\beta_0 \operatorname{ctg}\alpha_0.$$

Равенство (Е) доказано.

6. Из равенства (В) $\cos\beta_0 = \operatorname{tg}\alpha : \operatorname{tg}\gamma$. Применив это равенство для выражения $\cos\alpha_0$ через $\operatorname{tg}\beta$ и $\operatorname{tg}\gamma$, получаем

$$\cos\alpha_0 = \operatorname{tg}\beta : \operatorname{tg}\gamma. \tag{8}$$

Из равенства (Б) следует

$$\sin\beta_0 = \sin\beta : \sin\gamma. \tag{9}$$

Разделив почленно равенство (9) на (8), получаем

$$\frac{\sin\beta_0}{\cos\alpha_0} = \frac{\sin\beta \operatorname{tg}\gamma}{\sin\gamma \operatorname{tg}\beta} = \frac{\sin\beta \sin\gamma \cos\beta}{\sin\gamma \cos\gamma \sin\beta} = \frac{\cos\beta}{\cos\gamma}.$$

Из равенства (А) находим

$$\frac{\cos\beta}{\cos\gamma} = \frac{1}{\cos\alpha},$$

поэтому

$$\frac{\sin\beta_0}{\cos\alpha_0} = \frac{1}{\cos\alpha} \Rightarrow \sin\beta_0 \cos\alpha = \cos\alpha_0.$$

Равенство (Е) доказано.

Доказанные формулы целесообразно использовать при решении многих задач на определение элементов многогранников и круглых тел, в том числе и при решении предлагаемых ниже задач.

Задача 1. На рис. 105 изображена правильная четырехугольная пирамида $MABCD$; $O = (AC) \cap (BD)$; $\hat{MAO} = 60°$. Определить: 1) $\hat{MAB}$; 2) $(BAM, \hat{AMO})$; 3) $(BAM, \hat{AMD})$; 4) $(MAB, \hat{ABO})$.

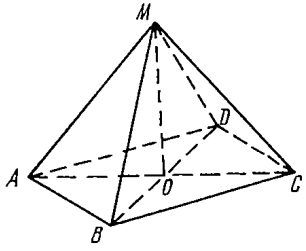


Рис. 105

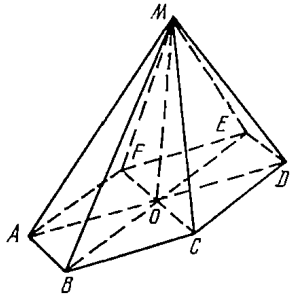


Рис. 106

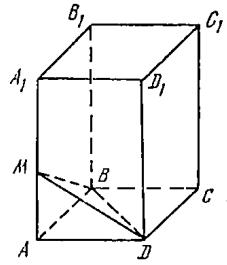


Рис. 107

1) Рассмотрим прямоугольный трехгранный угол $AOMB$. У него известны: $\hat{OAB} = 45°$ и $\hat{MAO} = 60°$. В обозначениях теоремы:

$$\hat{OAB} = \alpha = 45°,\ \hat{MAO} = \beta = 60°,\ \hat{MAB} = \gamma.$$

Поэтому для определения $\hat{MAB}$ применим формулу (А):

$$\cos\gamma = \cos\alpha\ \cos\beta = \cos 45° \cdot \cos 60° = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} \approx 0{,}35;\ \gamma \approx 20°;$$

2) в обозначениях табл. 1: $\hat{OAB} = \beta = 45°$, $\hat{MAO} = \alpha = 60°$, $(BAM, \hat{AMO}) = \beta_0$. Поэтому для определения $(BAM, \hat{AMO})$ можно применить формулу (Г) к прямоугольному трехгранному углу $AOMB$:

$$\operatorname{tg}\beta_0 = \operatorname{tg}\beta : \sin\alpha = \operatorname{tg} 45° : \sin 60° = 1 : \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 1{,}18;\ \beta_0 \approx 50°;$$

3) $(BAM, \hat{AMD}) = 2\,(BAM, \hat{AMO})$. Поэтому $(BAM, \hat{AMD}) \approx 2 \times \times 50° \approx 100°$;

4) для определения $(MAB, \hat{ABO})$ применим формулу (Г) к прямоугольному трехгранному углу $AOMB$:

$$\operatorname{tg}(BAM, \widehat{ABO}) = \operatorname{tg} 60^\circ : \sin 45^\circ \approx 2{,}43;\ (BAM, \widehat{ABO}) \approx 68^\circ.$$

Задача 2. На рис. 106 изображена правильная шестиугольная пирамида $MABCDEF$. Площадь ее основания равна 12 см^2; $M\hat{A}O = 45^\circ$ (O — основание высоты пирамиды). Найти площадь S боковой поверхности пирамиды.

Боковая поверхность шестиугольной пирамиды $MABCDEF$ состоит из шести конгруэнтных между собой треугольников. Поэтому достаточно найти площадь одного из них, например, $\triangle MAB$. Но $\triangle ABO$ — ортогональная проекция $\triangle MAB$ на плоскость основания пирамиды. Поэтому $S_{ABM} = S_{ABO} : \cos\varphi$, где $\varphi = (MAB, \widehat{ABO})$. $S_{\triangle ABO} = 12 : 6 = 2$ (см^2). Следовательно, для решения задачи достаточно найти $\cos\varphi$.

$\angle\,(MAB, ABO)$ является двугранным углом трехгранного угла $AOMB$, у которого $M\hat{A}O = 45^\circ$, $O\hat{A}B = 60^\circ$. Применив к трехгранному углу $AOMB$ формулу (Г), получаем $\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg} 45^\circ : \sin 60^\circ = 2 : \sqrt{3}$. Но

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \frac{\sqrt{1-\cos^2\varphi}}{\cos\varphi} = \sqrt{\frac{1}{\cos^2\varphi} - 1}.$$

Отсюда

$$\operatorname{tg}^2\varphi = \frac{1}{\cos^2\varphi} - 1 \text{ и } \frac{1}{\cos^2\varphi} = \operatorname{tg}^2\varphi + 1 = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1 = \frac{7}{3}.$$

Итак,

$$S_{\triangle ABM} = 2\,\frac{1}{\cos^2\varphi} = 2\sqrt{\frac{7}{3}} \text{ и } S = 6 \cdot 2\sqrt{\frac{7}{3}} = 4\sqrt{21}.$$

Задача 3. На рис. 107 изображен прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, у которого $|AD| = 4$, $|AB| = 3$, $|AA_1| = 10$; M — середина $[AA_1]$. Найти $(ABD, \widehat{BDM})$.

$\angle\,(ABD, BDM)$ — двугранный угол прямоугольного трехгранного угла $DAMB$. У прямоугольных треугольников BAD и MAD известны катеты, поэтому можно определить любую тригонометрическую функцию $A\hat{D}M$, $A\hat{D}B$. Следовательно, для определения $(ABD, \widehat{BDM})$ целесообразно применить формулу (Г):

$$\operatorname{tg}(ABD, \widehat{BDM}) = \operatorname{tg} A\hat{D}M : \sin A\hat{D}B;\ \operatorname{tg} A\hat{D}M = |AM| : |AD| = (10 : 2) : 4 = 5 : 4.$$

$$\sin A\hat{D}B = |AB| : |BD| = |AB| : \sqrt{|AB|^2 + |AD|^2} = 3 : 5.$$

Итак, $\operatorname{tg}(ABD, \widehat{BDM}) = \frac{5}{4} : \frac{3}{5} = 25 : 12 \approx 2{,}08$; $(ABD, \widehat{BDM}) \approx 64°$.

Упражнения

1. Два равнобедренных прямоугольных треугольника ACD и DCB конгруэнтны ($\hat{C} = 90°$, катет $[CD]$ — общий) и образуют между собой прямой двугранный угол. Найти: 1) $\angle(DB, ACD)$;* 2) $A = \angle(ACB, ABD)$;* 3) $\varphi = \angle(DC, ADB)$; 4) $\angle(DB, ACD)$; 5) $\angle(CB, AD)$. *

2. Два прямоугольных треугольника ACD и BCD (угол C — прямой, катет $[CD]$ — общий) образуют между собой прямой двугранный угол, причем $|CD| : |AC| : |CB| = 1 : 2 : 3$. Найти: 1) $A = \angle(ACD, ADB)$; 2) $\varphi = \angle(AC, ABD)$.

3. Два прямоугольных треугольника ACB и BCD имеют общий катет $|BC| = 4$ (вершины прямых углов C совпадают) и образуют между собой двугранный угол 60°; $|AC| = |BC|$ и $|CD| = 8$. Определить:
1) $\angle(ADB, DBC)$; $\angle(BC, AD)$; $\angle(AC, BD)$.
2) $\angle(BD, ABC)$; $\angle(AC, ABD)$.

4. У прямоугольного треугольника с катетами $|AC| = 3$ и $|BC| = 4$ гипотенуза $[AB]$ лежит на плоскости P, которая образует с плоскостью ABC двугранный угол 45°. Определить: 1) расстояние $|CO|$ от точки C до P; 2) $\angle OAB$, который является ортогональной проекцией $\angle CAB$ на P; 3) $\angle AOB$ — ортогональную проекцию $\angle ACB$ на P; 4) $\angle(ABC, \overline{BOC})$; 5) $\angle(AO, \overline{BOC})$; 6) $\angle(AO, BC)$.

5. Два прямоугольных треугольника DCA и DCB имеют общий катет $[DC]$ (вершины прямых углов C совпадают); $\hat{BAD} = 45°$; $\hat{CAD} = 30°$; $\hat{CBD} = 45°$. Определить $\angle(ACD, BCD)$.

6. Два прямоугольных равнобедренных треугольника DCA и CDB имеют общий катет $[CD]$ (вершины их прямых углов не совпадают) и образуют между собой двугранный угол 60°. Определить: 1) $\angle(AD, CDB)$; 2) $\angle CDX$ — ортогональную проекцию $\angle CDA$ на плоскость CDB; 3) $\angle BDA$; 4) $\angle(\overline{CB}, DA)$.

7. Боковое ребро $[DA]$ правильной пирамиды $DABC$ в два раза больше ее высоты DO. Найти двугранный угол X при основании пирамиды.

8. В правильной шестиугольной пирамиде площадь основания равна Q, а боковое ребро составляет с основанием угол β. Определить боковую поверхность M пирамиды.

9. В правильной n-угольной пирамиде $MA_1A_2 \ldots A_n$ двугранный угол между боковыми гранями α. Найти высоту $|MO|$ пирамиды, если расстояние $|OH|$ от основания O высоты до бокового ребра равно a. При каком значении α высота этой пирамиды будет наименьшей?

10. Двугранный угол при боковом ребре правильной пирамиды $MABCDEF$ равен φ. Боковое ребро равно b. Найти радиус R шара, описанного около пирамиды. При каком значении b и φ радиус шара будет наибольшим?

11. Треугольник ABC_0 — ортогональная проекция прямоугольного треугольника ABC ($[AB]$ — его гипотенуза); $\hat{CAC_0} = \alpha$, $\hat{C_0BC} = \beta$. Установить зависимость между α, β, $\varphi = \angle(ABC_0, \widehat{ABC})$.

12. Площадь основания ABC правильной пирамиды $DABC$ равна M. Угол бокового ребра с основанием в 4 раза меньше плоского угла при вершине. Найти площадь X треугольника ABD.

---

* $\angle(DB, ACD)$ — угол прямой (DB) с плоскостью ACD; $\angle(ACB, ABD)$ — двугранный угол, образованный плоскостями ACB и ABD; $\angle(\overline{CB}, AD)$ — угол между прямыми (CB) и (AD).

13. В пирамиде $ABCD$ дано: $|AB| = 5$, $|BC| = 9$, $|CA| = 7$, $|DA| = 10$. $|DB| = 11$, $|DC| = 12$. Определить $\varphi = \angle(AD, BC)$.

14. У куба AD_1 ребро равно 1. Найти расстояние a между скрещивающимися прямыми (D_1B) и (B_1C).

15. Куб AD_1, ребро которого 1, пересечен плоскостью P, проходящей через C, середину M ребра $[AB]$ и точку K, которая делит ребро $[AD]$ в отношении 3:1, считая от A. Найти площадь сечения куба плоскостью P.

16. Дан куб AD_1 с ребром 1. Найти площадь сечения куба плоскостью, проходящей через A и середины K и M ребер $[B_1C_1]$ и $[C_1D_1]$.

17. В правильной пирамиде $EABCD$ через вершину A основания $ABCD$ проведена плоскость, перпендикулярная ребру $[CE]$. Найти площадь X сечения $AMHK$, если диагональ основания пирамиды равна a. Боковое ребро наклонено к плоскости основания под углом φ ($\varphi > 45°$).

18. В правильной пирамиде $EABCD$ угол при основании равен α. Через ребро $[AB]$ основания проведена плоскость под углом φ к нему. Найти площадь сечения, если $|AB| = a$.

19. В призме $ABCA_1B_1C_1$ боковое ребро равно a. В основании ее лежит правильный треугольник со стороной b, а прямая (B_1O) (O — центр $\triangle ABC$) перпендикулярна основаниям. Найти площадь сечения ABM (M — середина ребра $[CC_1]$).

20. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ $|AB| = 4$, $|AD| = 6$, $|AA_1| = 8$. Точки O и O_1 — центры его оснований. Точка M делит $[OO_1]$ в отношении 1:3. Найти площадь сечения, проходящего через M параллельно прямым (AC_1) и (BD).

21. В основании пирамиды $DABC$ — равнобедренный треугольник ABC с высотой b. Боковая грань ABD — равнобедренный треугольник с высотой c и основанием a — перпендикулярна основанию. Плоскость P параллельна (AB) и пересекает (AD) в точке M ($|AM| : |AD| = k$) и (AC) в точке E ($|AE| : |AC| = p$). Установить форму сечения $EMXY$ как функцию k и p. Найти площадь этого сечения. При каком значении k и p сечением пирамиды будет квадрат?

22. Сторона AB основания правильной пирамиды $MABCDEF$ равна a, апофема боковой грани — b. Сечение П пирамиды проходит через точку X высоты $[MO]$ ($|MX| : |MO| = k < 1$) параллельно боковой грани MAB. Найти площадь сечения. При каком значении k эта площадь наибольшая?

23. Найти объем пирамиды $DA_1A_2 \ldots A_n$, у которой известны площадь основания, площадь грани DA_1A_2, $|A_1A_2| \neq a$, двугранный угол $\varphi = \angle(A_1A_2A_3 A_1A_2D)$.

24. У пирамиды $DABC$ все плоские углы с вершинами в точках A и B равны α, $|AB| = a$. Найти объем пирамиды.

25. Дан куб AD_1 с ребром 1. Через A, точку M ребра $[BC]$ ($|BM| : |BC| = k$) и центр O грани CC_1D_1D проходит плоскость П. Найти отношение, в котором П делит объем куба. Существует ли такое значение k, при котором полученные части куба равновелики?

26. Плоскость П, проходящая через ребро $[AB]$ правильного тетраэдра $ABCD$, делит его объем в отношении k. Найти углы x и y, на которые разделился угол AB. Установить зависимость между x и y, при которой $k = 0{,}6$.

27. Дана правильная пирамида $MABCD$. Сторона $[CD]$ основания продолжена на $[PD]$ ($|PD| = k|CD|$ или $|PC| = (k+1)|CD|$). Через P, B и середину E ребра $[MC]$ проведена плоскость П. Найти отношение объемов частей пирамиды, на которые ее разделила плоскость П. При каком значении k эти части равновелики?

28. В основании пирамиды $DABC$ лежит правильный треугольник ABC со стороной a; $\angle(ABC, ABD) = \alpha$, $\angle(ABC, BCD) = \beta$, $\angle(ABC, ACD) = \gamma$. Найти объем пирамиды.

29. Дана пирамида $ABCD$; $|AB| = 2$, $|CD| = 4$. Расстояние между прямыми

(AB) и (CD) равно 6; $\angle (AB, CD) = 60°$. Пирамида рассечена плоскостью P, которая параллельна (AB) и (CD) и одинаково отстоит от них. В каком отношении P делит объем пирамиды?

30. В конус вписано два шара так, что они касаются друг друга и боковой поверхности конуса. Центры их лежат на оси конуса и больший шар касается его основания. Найти объем конуса, если радиусы шаров равны 20 и 35 мм.

31. В куб AD_1 с ребром a вписан шар. Найти радиус другого шара, касающегося трех граней куба и первого шара.

32. В усеченный конус с радиусами оснований a и b вписан шар. Найти радиус второго шара, который касается первого, боковой поверхности и верхнего основания конуса.

33. Внутри сферы S расположены четыре шара радиуса 10 мм. Каждый из них касается трех других и поверхности сферы. Определить радиус сферы S.

34. В правильную пирамиду $EABCD$ с вершиной E и стороной основания 100 мм вписан шар. Апофема боковой грани равна 100 мм. Плоскость П составляет 30° с основанием, касается шара и пересекается с плоскостью основания, не пересекаясь с самим основанием, по линии, параллельной (AB). Найти площадь сечения пирамиды плоскостью П.

35. Три шара радиуса 15 мм лежат на нижнем основании правильной треугольной призмы. Каждый из них касается двух других и двух боковых граней призмы. На этих шарах лежит четвертый шар Ш, который касается боковых граней и верхнего основания призмы. Найти высоту h призмы.

36. Через сторону AB основания ABC правильной пирамиды $DABC$ и центр O вписанного в нее шара проведена плоскость П. В каком отношении плоскость П делит объем пирамиды, если боковое ребро наклонено к ABC под углом α? Есть ли такое значение α, при котором полученные части пирамиды равновелики?

37. Даны три одинаковых конуса с прямым углом в осевом сечении и радиусом основания 20 мм. Основания конусов лежат в одной плоскости и попарно касаются внешним образом. Найти радиус R сферы, касающейся всех трех конусов и плоскости, проходящей через их вершины.

38. Конус имеет радиус основания b и угол α в осевом сечении. Два одинаковых шара радиуса a касаются друг друга, боковой поверхности конуса (извне) и плоскости основания конуса. Найти площадь треугольника, вершинами которого служат центры шаров и центр основания конуса.

39. Ребро куба AD_1 равно a. Найти объем цилиндра, вписанного в куб так, что ось его лежит на диагонали BD_1 куба, а окружности оснований касаются тех диагоналей граней куба, которые не имеют общих точек с (BD_1).

40. Правильная пирамида $MABCD$, в основании которой лежит квадрат $ABCD$ со стороной a, вращается вокруг прямой l, проходящей через M; $l \parallel (AB)$. Вычислить объем тела вращения, если плоский угол при вершине M равен α.

41. Три шара касаются плоскости треугольника ABC в его вершинах и попарно между собой. Найти радиусы шаров, если $|AB| = c$, $|BC| = a$, $|CA| = b$.

42. Угол между образующей OA конуса и его высотой OH равен α. Найти угол x между образующими OA и OB, если плоскости, касающиеся конуса по этим образующим, перпендикулярны.

43. Два конгруэнтных конуса имеют общую вершину O и касаются по общей образующей. Угол осевого сечения равен 2α. Найти угол x между двумя плоскостями, которые касаются обоих конусов и проходят через O.

44. У треугольника ABC $|AB| = |AC| = b$, $\overset{\wedge}{BAC} = \alpha$. Он вращается вокруг оси p, проходящей через A так, что $\angle (p, ABC) = \beta$, а основание треугольника перпендикулярно p. Вычислить объем тела, полученного при вращении треугольника ABC.

45. Из конца A диаметра $[AB]$ шара проведена хорда $[AC]$ так, что поверхность, образуемая вращением ее вокруг этого диаметра, делит объем шара на две равновеликие части. Определить угол между хордой и диаметром.

46. В конус вписан шар. Отношение их объемов равно k. Найти отношение полной поверхности конуса к поверхности шара. Определить допустимые значения k.

47. Правильный тетраэдр $DABC$ помещен внутри шара радиуса a так, что три его вершины лежат на поверхности шара, центр O шара находится внутри тетраэдра на расстоянии b от его четвертой вершины D. Найти ребро тетраэдра.

48. Дан конус и вписанный в него шар. Около шара описан цилиндр, основание которого лежит в плоскости основания конуса. V_1 — объем конуса, V_2 — объем цилиндра. Доказать, что равенство $V_1 = V_2$ невозможно. Указать наименьшее значение k, при котором имеет место равенство $V_1 = kV$ и найти для этого случая угол при вершине осевого сечения конуса.

49. Шар радиуса r касается всех ребер пирамиды $DABC$. Центр O шара лежит внутри пирамиды на ее высоте $[BT]$ на расстоянии $r\sqrt{3}$ от вершины. Доказать, что пирамида правильная. Найти высоту пирамиды.

50. Дана правильная пирамида $DABC$ (D — вершина) со стороной основания a и боковым ребром b ($b > a$). Сфера лежит над плоскостью основания ABC, касается этой плоскости в точке A и касается бокового ребра $[DB]$. Найти радиус этой сферы.

51. Дан тетраэдр (не обязательно правильный), все грани которого равновелики между собой. Доказать, что центры вписанного в него и описанного около него шаров совпадают.

52. Четырехугольная пирамида $MABCD$ (четырехугольник $ABCD$ — ее основание, $[MH]$ — ее высота) обладает одним из следующих свойств:

1. Около пирамиды можно описать сферу.
2. В пирамиду можно вписать сферу.
3. Точка $H = [AC] \cap [BD]$ и H — центр симметрии четырехугольника $ABCD$.
4. Всякое сечение пирамиды плоскостью, проходящей через MH, является равнобедренным треугольником.
5. Все ребра пирамиды конгруэнтны.
6. Пирамида правильная.
7. $|MA| = |MB| = |MC| = |MD|$.
8. Четырехугольник $ABCD$ — квадрат и $H = B$.
9. Четырехугольник $ABCD$ — квадрат, $H \in [BD]$ и $|DH| : |HB| = 0{,}5$.
10. Четырехугольник $ABCD$ — прямоугольник и H — середина $[AB]$.
11. Плоскость MBD является плоскостью симметрии пирамиды.
12. Пирамида имеет две плоскости симметрии.
13. (MH) — ось вращения пирамиды.

Какое из этих свойств пирамиды является следствием одного из остальных ее свойств?

53. Четырехугольная призма $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ($[AD] \parallel [BC]$) обладает одним из следующих свойств:

1. Около призмы можно описать сферу.
2. В призму можно вписать сферу.
3. Все грани призмы конгруэнтны.
4. Призма является параллелепипедом.
5. Основанием призмы является ромб.
6. $|AB| = |AD| = |DC| = 0{,}5\,|BC|$ и $[AA_1] \perp$ пл. ABC.
7. Все диагонали призмы пересекаются в одной точке.
8. Призма имеет центр симметрии.
9. Призма является прямоугольным параллелепипедом.
10. В призму можно вписать сферу и около нее можно описать сферу (центры этих сфер совпадают).
11. Все грани призмы равновелики.
12. Все диагонали призмы конгруэнтны.
13. Призма имеет три плоскости симметрии.
14. Призма является кубом.

15. Призма является правильной призмой.
16. Все ребра призмы конгруэнтны.
17. Призма имеет три оси вращения.
18. Суммы трех плоских углов при всех вершинах призмы одинаковы.

Какое из этих свойств призмы является следствием одного из остальных ее свойств?

§ 8. Об исследовании решений задач

О решении задач с параметрами

Решение задачи, содержащей параметры, заключается не только в том, чтобы найти величину искомого элемента геометрической фигуры, но и в установлении тех значений параметров, при которых она имеет решение.

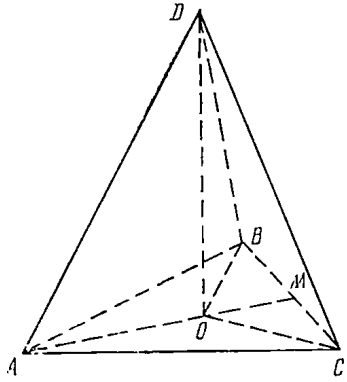


Рис. 108

Обычно исследование решения проводится после получения ответа на вопрос задачи (по формуле, выражающей зависимость между данными и искомыми элементами фигуры). Однако часто целесообразнее сначала определить допустимые значения параметров, а потом заняться вычислениями. Такой подход не только упрощает само исследование, но и позволяет найти более рациональное решение, избежать возможных ошибок при установлении допустимых значений параметров.

Задача. Основанием треугольной пирамиды $DABC$ является равнобедренный треугольник ABC, у которого $|AB| = |AC|$, $|BC| = a$, $\widehat{BAC} = 2\alpha$. Все боковые ребра пирамиды равны между собой; $\widehat{DAC} = \beta$. Определить длину $|AD|$.

Боковые ребра пирамиды равны. Поэтому основанием высоты этой пирамиды является центр O окружности, описанной около треугольника ABC (рис. 108). Треугольник ABC равнобедренный. Следовательно, точка O принадлежит лучу $[AM)$ (M — середина $[BC]$). Угол OAC является ортогональной проекцией угла DAC на плоскость ABC. Угол DAC острый, так как треугольник ADC равнобедренный. Угол OAC также острый. Поэтому пирамида $DABC$, о которой говорится в задаче, существует только в том случае, если $0 < \beta < 90°$, $0 < \alpha < 90°$ и $\beta > \alpha$. Решим эту задачу.

Обозначим: $\widehat{DAO} = x$. Из прямоугольного треугольника AOD имеем $|AD| = |AO| : \cos x$. Отрезок $[AO]$ равен радиусу окружности,

описанной вокруг треугольника ABC. Поэтому $|AO| = |BC| : 2\sin 2\alpha = a : 2\sin 2\alpha$. Угол x найдем из прямоугольного трехгранного угла $AODC$ (по формуле (A)), (с. 186):

$$\cos\beta = \cos\alpha\ \cos x;\ \cos x = \frac{\cos\beta}{\cos\alpha}.$$

Таким образом,

$$|AD| = |AO| : \cos x = \frac{a\cos\alpha}{2\sin 2\alpha\cos\beta} = \frac{a}{4\sin\alpha\cos\beta}.$$

Так как для острых углов α и β дробь

$$\frac{a}{4\sin\alpha\cos\beta}$$

положительна, то многие из решающих эту задачу считают, что никаких дополнительных условий на углы α и β накладывать не нужно. Предварительно выполненное исследование позволяет избежать этой ошибки.

Упражнения

Используя формулы (A) — (E) с. 186, установить, при каких значениях параметров задачи имеют решения (не решая эти задачи).

1. Определить полную поверхность правильной четырехугольной пирамиды, сторона основания которой равна a, а угол, образованный боковым ребром со стороной основания, равен φ.

2. Боковые ребра треугольной пирамиды равны между собой и каждое из них равно a. Плоские углы при вершине пирамиды равны α, β, γ. Определить объем пирамиды.

3. Определить объем правильной четырехугольной пирамиды, боковое ребро которой равно a, двугранный угол между двумя смежными боковыми гранями равен α.

4. Две боковые грани треугольной пирамиды образуют между собой угол φ и являются равными прямоугольными треугольниками, общий катет которых равен a, гипотенуза c. Определить объем пирамиды.

5. Диагональ прямоугольного параллелепипеда составляет с плоскостью основания угол α, а с боковой гранью — угол β. Высота пирамиды равна H. Определить объем пирамиды.

6. Боковое ребро правильной треугольной пирамиды, равное b, образует со стороной основания угол α. Найти боковую поверхность пирамиды.

7. Найти боковую поверхность правильной шестиугольной пирамиды, у которой боковое ребро равно b, а двугранный угол при боковом ребре φ.

8. В основании пирамиды лежит равносторонний треугольник, сторона которого равна a. Два боковых ребра пирамиды составляют с плоскостью основания углы, равные α, а грань, заключенная между ними, наклонена к основанию под углом φ. Определить объем пирамиды.

9. В правильной четырехугольной пирамиде сторона основания равна a. Грани наклонены к основанию под углом α. Через сторону основания пирамиды проведена плоскость, перпендикулярная плоскости противоположной боковой грани и пересекающая ее ребра. Найти площадь сечения.

Упражнения к гл. 6

Комбинаторные и логические задачи

1. Доказать, что нельзя провести прямую так, чтобы она пересекала все стороны 1001-угольника.

2. В плоскости даны пять точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Доказать, что среди этих точек существуют четыре такие, которые являются вершинами выпуклого четырехугольника.

3. В плоскости даны $n > 4$ точек, причем никакие три не лежат на одной прямой. Доказать, что можно найти не менее C_{n-3}^2 выпуклых четырехугольников с вершинами в четырех данных точках.

4. В пространстве даны шесть таких точек P_j ($j = 1, 2, \ldots, 6$), что никакие четыре из них не находятся в одной плоскости. Каждый отрезок прямой P_jP_k ($j \neq k$) окрашен в черный или белый цвет. Доказать, что существует хотя бы один треугольник $P_jP_kP_l$, стороны которого были бы одного цвета.

5. Пусть на плоскости даны 4000 точек таких, что никакие три из них не лежат на одной и той же прямой. Доказать, что в этом случае можно нарисовать на плоскости 1000 четырехугольников, не имеющих общих точек, но чтобы их вершинами были бы данные точки.

6. На плоскости даны шесть точек, из которых никакие три не лежат на одной прямой. Доказать, что среди них есть три точки, которые образуют треугольник с углом, не меньшим 120°.

7. Нетрудно покрыть 64 поля шахматной доски 32 костяшками домино так, чтобы каждая костяшка покрывала два поля (если, конечно, размеры полей и размеры костяшек соответствуют друг другу). Можно ли покрыть 62 поля шахматной доски 31 костью так, чтобы свободными остались два противоположных угловых поля доски?

8. Известно, что шесть кругов имеют общую точку. Доказать, что хотя бы один из них содержит центр некоторого другого круга.

9. Можно раскрасить грани куба либо в белый цвет, либо все в черный цвет, либо часть в белый, а часть в черный. Сколько существует различных способов окраски? (Два куба считаются раскрашенными различно, если их нельзя перепутать, как бы они ни переворачивались.)

10. Доказать, что шахматную доску из 10×10 клеток нельзя полностью закрыть без перекрытий фигурами, изображенными на рис. 109. (Класть эти фигуры надо так, чтобы каждая из четырех нарисованных клеток закрыла одно из полей доски; величина клетки такая же, как и величина поля.)

11. На какое наименьшее число тетраэдров можно разбить куб?

12. На плоскости даны пять точек. Среди прямых, проходящих через эти пять точек, нет параллельных, перпендикулярных и совпадающих. Через каждую точку проведены перпендикуляры ко всем прямым, проходящим через остальные точки. Каково максимальное число точек пересечения этих перпендикуляров между собой, не считая данные пять точек?

13. Для каждого значения $k = 1, 2, 3, 4, 5$ найти необходимые и достаточные условия, которым должно удовлетворять число $a > 0$, для того чтобы существовал тетраэдр, k ребер которого имеют длину a, а остальные $6 + k$ ребер — длину 1.

14. В плоскости дано $n > 3$ точек, причем никакие три точки не лежат на одной прямой. Существует ли окружность, проходящая по крайней мере через три данные точки и не содержащая внутри себя ни одной из остальных?

15. Найти наибольшее число областей, на которые рассекают круг отрезки, соединяющие n точек, лежащих на его окружности.

16. В плоскости даны пять точек, из которых никакие три не лежат на одной прямой. Каждые две из этих точек соединены друг с другом либо красным,

либо синим отрезком так, что никакие три из этих отрезков не образуют треугольника одного цвета. 1. Доказать, что: а) из каждой точки выходит ровно два красных и два синих отрезка; б) красные отрезки образуют замкнутую ломаную линию, которая содержит все пять заданных точек (точно так же синие отрезки). 2. Показать, каким способом нужно соединить пять точек красными и синими отрезками, чтобы были выполнены условия задачи.

17. На доске размером 4×100 квадратиков положено столько прямоугольных костяшек, что каждая из них целиком покрывает ровно две клетки, никакие две не перекрываются и ни один квадратик не остается свободным. Доказать, что при этом можно распилить доску по одной из нанесенных на нее продольных или поперечных прямых, не сдвигая с места и не распиливая ни одной костяшки.

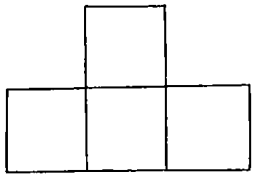


Рис. 109

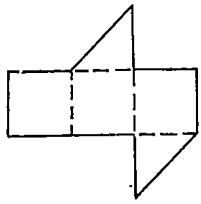


Рис. 110

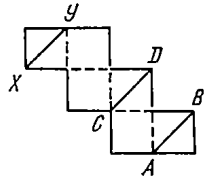


Рис. 111

18. Доказать, что шахматную доску размером $4\times n$ нельзя обойти конем так, чтобы побывать при этом по одному разу на каждом поле и последним ходом вернуться на исходное.

19. В плоскости дан правильный n-угольник $A_1A_2\ldots A_n$ $(n>3)$. Сколько имеется тупоугольных треугольников $A_iA_jA_k$ $(i,\ j,\ k=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$?

20. Квадратный лист бумаги разрезают по прямой на две части. Одну из полученных частей снова разрезают на две части и так делают много раз. Какое наименьшее число разрезов нужно сделать, чтобы среди полученных частей оказалось ровно 100 двадцатиугольников?

Задачи на развитие пространственного воображения *

21. Построить развертку куба так, чтобы она имела четыре оси симметрии.

22. На рис. 110 дана часть развертки куба (три его боковые грани и части верхнего и нижнего оснований). Построить полную развертку этого куба.

23. Построить развертку куба так, чтобы она была двенадцатиугольником.

24. На рис. 111 дана развертка куба. Построить новую развертку этого куба так, чтобы отрезки $[XY]$, $[AB]$ и $[CD]$ были частями контура новой развертки.

25. На сколько частей распадается поверхность многогранника (рис. 112), если разрезать ее по отрезкам $[EM]$, $[CP]$, $[ED]$, $[DP]$, $[MC]$, $[BC]$, $[AP]$, $[AB]$?

26. Можно ли поверхность фигуры (рис. 113) развернуть в развертку, разрезав ее по отрезкам $[AB]$, $[PX]$, $[KA]$, $[CK]$, $[DM]$? Если нет, то сколько и каких еще разрезов для этого следует выполнить?

27. Муха движется по поверхности куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и проходит через все его вершины только один раз. Построить путь наименьшей длины: 1) если

---

* Основное назначение задач, помещенных в этом пункте, — это развитие пространственного воображения учащихся, обогащение их пространственных представлений и развитие логического мышления. Систематическое решение таких задач развивает конструктивные и комбинаторные способности, умение выполнять в воображении сложные пространственные перемещения фигур.

муха движется из вершины A в D; 2) из вершины A в A_1; 3) из вершины A в D_1.

28. Каждая грань куба заклеивается двумя конгруэнтными прямоугольными треугольниками, из которых один белый, другой черный. Расположить эти треугольники так, чтобы при каждой вершине сумма белых углов была равна сумме черных углов.

29. Каждая грань куба заклеивается четырьмя конгруэнтными прямоугольными равнобедренными треугольниками, из которых один белый, второй черный, третий красный, четвертый синий. Расположить эти треугольники так, чтобы

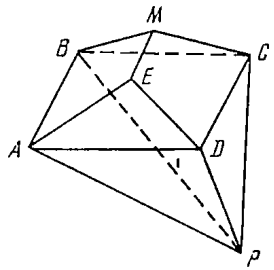


Рис. 112

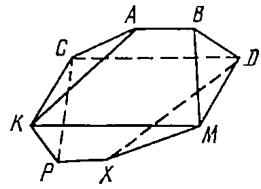


Рис. 113

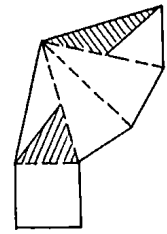


Рис. 114

при каждой вершине куба было одинаковое число белых, черных, красных и синих углов.

30. На рис. 114 дана развертка правильной пирамиды. Некоторые части ее заштрихованы. На рис. 115 изображены правильные пирамиды. Разверткой каких из них может быть фигура, данная на рис. 114?

31. На рис. 116 дана развертка куба. На рис. 117 изображены одинаковые по величине кубы. Разверткой каких из них может быть фигура, данная на рис. 116?

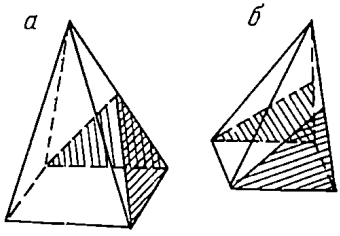


Рис. 115

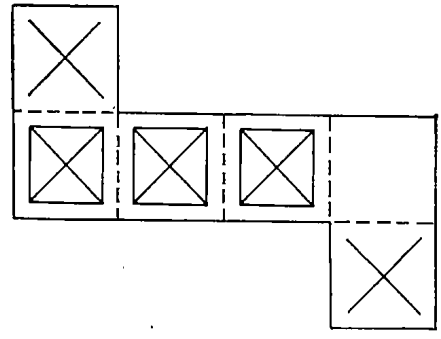


Рис. 116

32. На рис. 118 дана развертка куба. Одна из ее граней и части двух других граней закрашены. На рис. 119 изображены кубы. Разверткой каких из них может быть фигура, данная на рис. 118?

33. На рис. 120 изображено по три развертки двух различно раскрашенных кубов. Найти развертки каждого из этих кубов.

34. Построить такую развертку правильной пирамиды (рис. 121), чтобы заштрихованная часть поверхности пирамиды на развертке состояла из двух центрально-симметричных фигур.

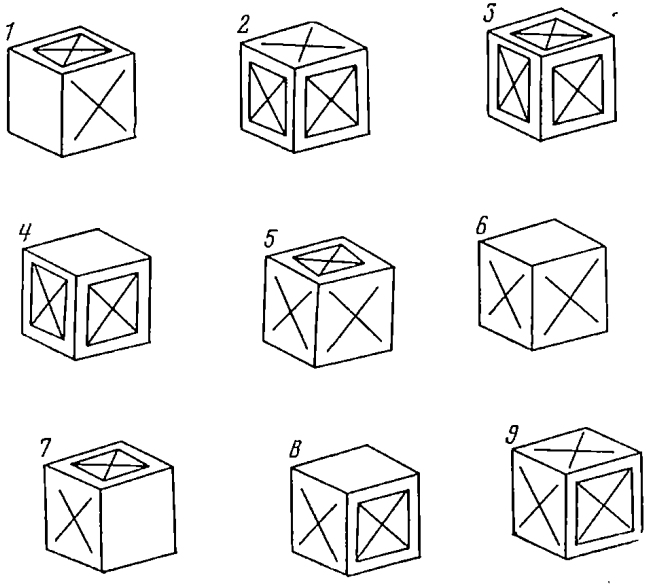


Рис. 117

Рис. 118

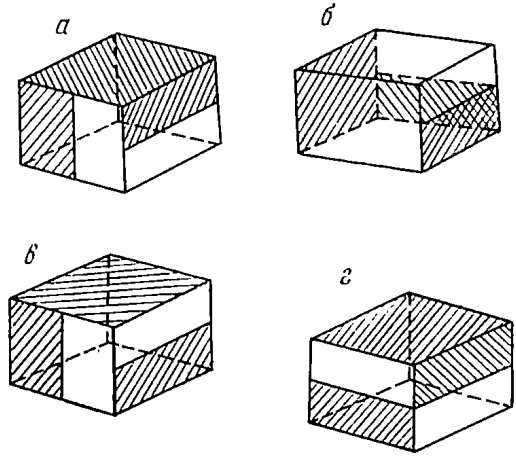


Рис. 119

35. Построить развертку куба (рис. 122), разрезав его поверхность по отрезкам $[AB]$, $[BC]$, $[AA_1]$, $[A_1D_1]$, $[A_1B_1]$, $[A_1C_1]$.

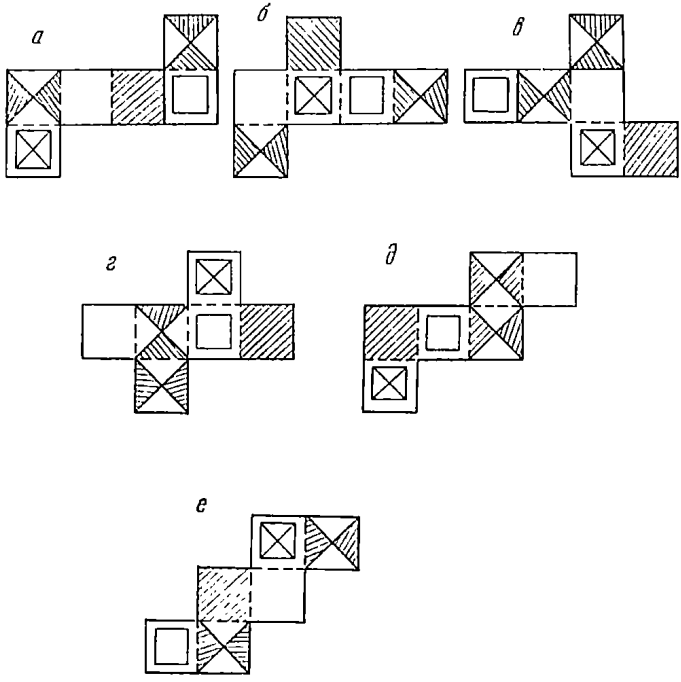


Рис. 120

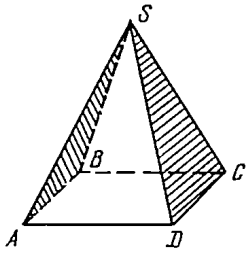


Рис. 121

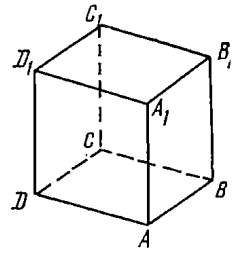


Рис. 122

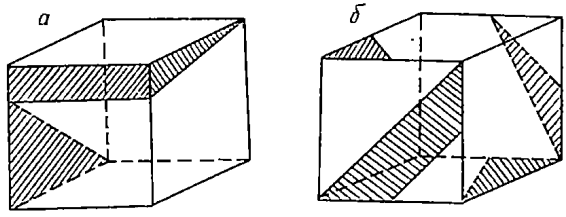


Рис. 123

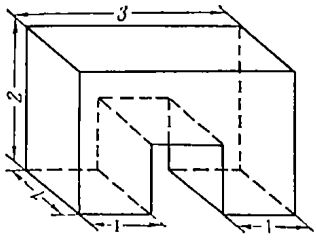


Рис. 124

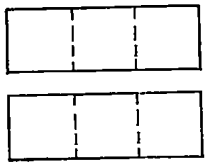


Рис. 125

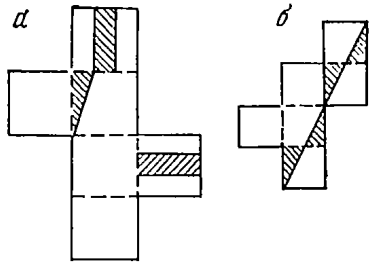


Рис. 126

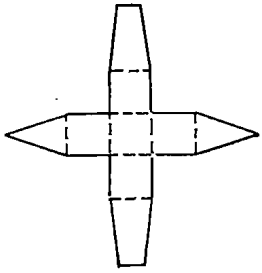


Рис. 127

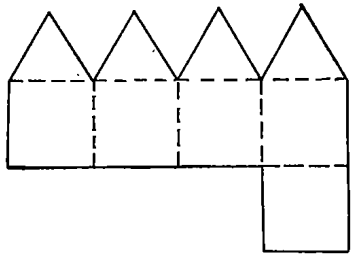


Рис. 128

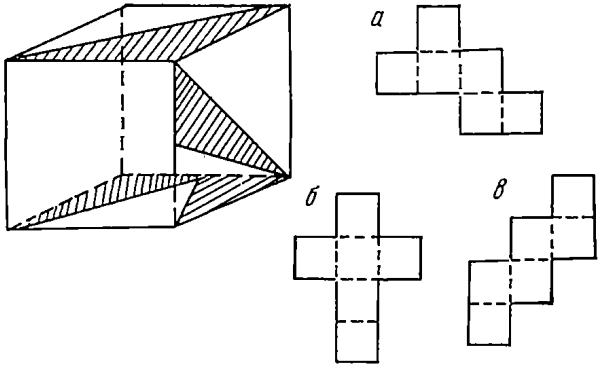


Рис. 129

36. На рис. 123 дано изображение куба (часть его поверхности заштрихована). Построить развертку этого куба и заштриховать те ее части, которые заштрихованы на изображении куба.

37. Построить такую развертку куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, чтобы точки D_1, B_1 и A на этой развертке являлись вершинами прямоугольного треугольника.

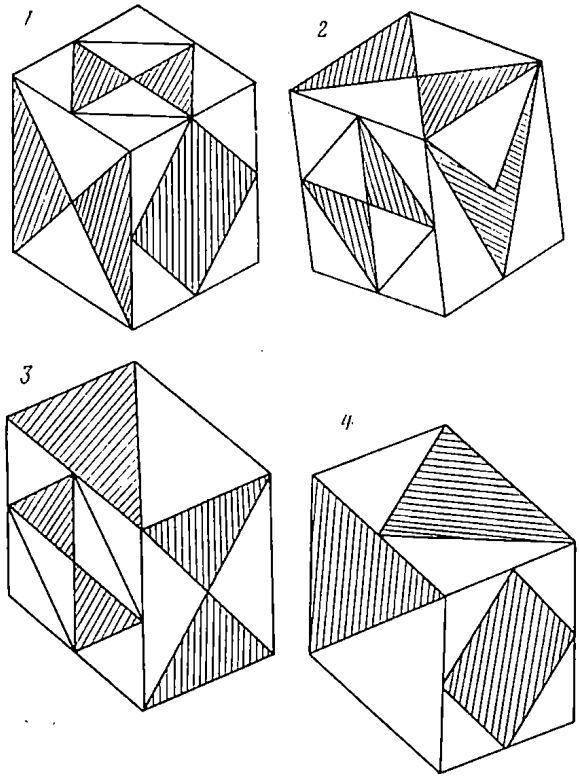


Рис. 130

38. Построить развертку фигуры, показанной на рис. 124.

39. Даны две части развертки куба (рис. 125). Построить на его изображении отрезки, разрезав по которым поверхность, мы сможем развернуть ее в данные фигуры.

40. На рис. 126 дана развертка куба. Построить изображение этого куба и заштриховать те части его поверхности, которые заштрихованы на развертке.

41. Дана развертка многогранника (рис. 127). Построить на его изображении отрезки, по которым следует разрезать поверхность, чтобы ее можно было развернуть в данную развертку.

42. Дана развертка многогранника (рис. 128). Построить его изображение.

43. На рис. 129 даны изображение куба и его развертки. Заштриховать те части этих разверток, которые заштрихованы на изображении куба.

44. На рис. 130 даны изображения четырех одинаковых кубов (их грани частично заштрихованы). Найти средн этих четырех кубов три с одннаково заштрихованными гранями и построить их развертку.

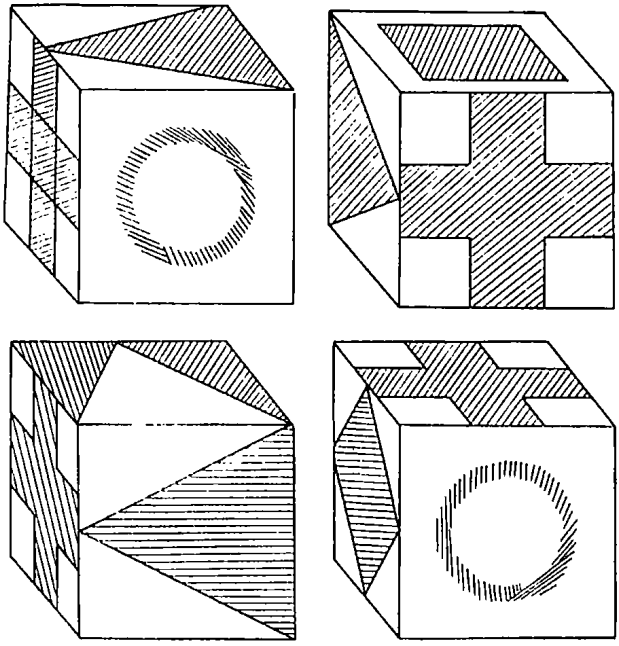


Рис. 131

45. На рис. 131 показан один н тот же куб (на рисунке видны только три его грани). Построить развертку этого куба и на ней изображенные на его гранях фигуры.

«Нестандартные» задачи *

46. а) Доказать, что к конечному множеству точек на плоскости, обладающему тем свойством, что любые три точки из этого множества являются вершинами невырожденного тупоугольного треугольника, всегда можно добавить еще одну точку, что это свойство сохранится. б) Справедливо ли аналогичное утверждение для бесконечного множества точек на плоскости?

47. Лист клетчатой бумаги размером $n \times n$ клеток раскрасили в n цветов (каждую клетку закрасили в один из цветов или не закрасили вообще). Правильной называется раскраска, при которой в каждой строке и в каждом столбце нет двух клеток одного цвета. Всегда ли можно «докрасить» весь лист правильно, если первоначально правильно была закрашена n^2-1 клетка?

48. Доказать, что из любого выпуклого равностороннего (но не обязательно правильного) пятиугольника можно вырезать правильный треугольник, одна из сторон которого совпадает со стороной пятиугольника.

49. Доказать, что не существует многогранника, у которого к каждой вершине и к каждой грани примыкает не менее чем по четыре ребра.

---

* Эти задачи и решения к ним взяты из журнала «Квант».

50. На доске была начерчена трапеция; в ней проведена средняя линия $[EF]$ и опущен перпендикуляр $[OK]$ из точки O пересечения диагоналей на большее основание. Затем трапецию стерли. Как восстановить чертеж по сохранившимся отрезкам $[EF]$ и $[OK]$?

51. Множество на плоскости, состоящее из конечного числа точек, обладает следующим свойством: для любых двух точек A и B множества найдется точка C множества такая, что треугольник ABC равносторонний. Сколько точек может содержать такое множество?

52. Можно ли из 18 плиток размером 1×2 выложить квадрат так, чтобы при этом не было ни одного прямого «шва», соединяющего противоположные стороны квадрата и идущего по краям плиток?

53. На бесконечном листе клетчатой бумаги N клеток выкрашено в черный цвет. Доказать, что из листа можно вырезать конечное число квадратов так, что будут выполнены два условия: 1) все черные клетки будут лежать в вырезанных квадратах; 2) в любом вырезанном квадрате K площадь черных клеток составит не менее $^1/_5$ и не более $^4/_5$ площади K.

54. На плоскости даны две точки A и B и прямая l, проходящая через точку A. Через точки A и B проводится произвольная окружность. Пусть O — ее центр, C — точка ее пересечения с прямой l, отличная от A. Найти множество середин отрезков $[OC]$, если $B\notin l$.

55. Можно ли разбить правильный треугольник на миллион выпуклых многоугольников так, чтобы любая прямая пересекала не более сорока из этих многоугольников? (Мы говорим, что прямая пересекает многоугольник, если она имеет с ним хотя бы одну общую точку.)

56. Какую наименьшую длину должен иметь кусок проволоки, чтобы из него можно было согнуть каркас куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 10 см? (Проволока может проходить по одному ребру дважды, загибаться на 90° и 180°, но ломать ее нельзя.)

57. Два равных прямоугольника расположены так, что их контуры пересекаются в восьми точках. Доказать, что площадь общей части этих прямоугольников больше половины площади каждого из них.

58. Каждая из девяти прямых разбивает квадрат на два четырехугольника, площади которых относятся как $2:3$. Доказать, что по крайней мере три из этих девяти прямых проходят через одну точку.

59. Доказать, что N точек плоскости всегда можно покрыть несколькими непересекающимися кругами, сумма длин диаметров которых меньше N и расстояние между любыми двумя из которых больше единицы. (Под расстоянием между двумя кругами понимается расстояние между их ближайшими точками.)

60. Каждая сторона правильного треугольника разбита на n конгруэнтных частей. Через точки деления проведены прямые, параллельные сторонам. В результате этого треугольник разбился на n^2 маленьких треугольников. Назовем «цепочкой» последовательность треугольников, в которой ни один не появляется дважды и каждый последующий имеет общую сторону с предыдущим. Каково наибольшее число треугольников в цепочке?

61. Около сферы радиуса 10 описан некоторый девятнадцатигранник. Доказать, что на его поверхности найдутся две точки, расстояние между которыми больше 21.

62. Доказать, что на плоскости нельзя расположить семь прямых и семь точек так, чтобы через каждую из точек проходили три прямые и на каждой прямой лежали три точки.

63. В окружности радиуса 1 проведено несколько хорд. Доказать, что если каждый диаметр пересекает не более k хорд, то сумма длин хорд меньше πk.

64. У выпуклого белого многогранника некоторые грани покрашены черной краской так, что никакие две грани не имеют общего ребра. Доказать, что если выполнено хотя бы одно из следующих условий: а) черных граней больше половины; б) площадь черных граней составляет больше половины площади поверхности многогранника, то в этот многогранник нельзя вписать шар.

65. В пространстве заданы четыре точки, не принадлежащие одной плоскости. Сколько существует различных параллелепипедов, для которых эти точки служат вершинами?

ОТВЕТЫ. УКАЗАНИЯ. РЕШЕНИЯ

Гл. 1

§ 1

6. При n нечетном. 7. При $n = 12k - 1$ (k — натуральное число).

§ 2

2. $x = 30 + 49m$, $y = 22 + 36m$ ($m = 0, 1, 2, \ldots$). 3. Рассмотреть случаи: 1) x и y — четные; 2) x и y — нечетные. 4. 1) $x = 2$, $y = 2^7 + 3$; 2) $x = 2$, $y = 2^7 - 3$. 5. Решить уравнение относительно y. 6. Решить уравнение относительно x. 8. При $a = -7$ $x = 1$.

Гл. 2

§ 1

1. Одна из них должна быть возрастающей, другая — убывающей. 2. $\varphi''(x) < 0$, $f''(x) > 0$; одна из них должна быть возрастающей, другая — убывающей. 3. Положительная, вогнутая, возрастающая. 4. Одна возрастающая, другая — убывающая. 5. Функция $y = 1 : f(x)$ выпуклая, если $f(x)$ выпуклая. 6. Выпуклая. 7. Положительная и вогнутая. 8. $a > 0$, $ax + b > 0$. 10. Выпуклая. См. упр. 6. 11. Вогнутая на $(-\infty; 0]$ и $(1; +\infty)$. Выпуклая на $(0; 1)$. 12. $(-\sqrt{5}, -\sqrt{3})$ и $(\sqrt{3}, \sqrt{5})$. См. упр. 5. 13. Данную функцию рассмотреть как сумму функций $y_1 = 1 : (x - 1)$ и $y_2 = 2 : (2 - x)$. На $(1; 2)$ функции y_1 и y_2 вогнутые.

Упражнения к гл. 2.

1. Нет. 2. 1) Рис. 14; 2) рис. 11; 3) рис. 18; 4) рис. 20; 5) рис. 19; 6) рис. 12; 7) рис. 16; 8) рис. 17; 9) рис. 15; 10) рис. 13. 6. Монотонная. 8. Нет. 12. Нет. 16. В точках, где знаменатель равен нулю. 17. В точках, где $f(x) < 0$. 18. Пусть $f(x) = ax^2 + bx + c$. Тогда функция $y = [f(x)]^x$ определена на $[x_1, x_2]$, если $a < 0$, и вне (x_1, x_2), если $a > 0$.

Гл. 3

§ 1

1. Применить теорему 1. 2. Применить теорему 1. 4. Очевидно, $1 + \log_a b = \log_a (ab)$. 5. Показать, что многочлен $\log_b^4 a + \log_a^4 b + 2$ является полным квадратом суммы двух чисел. 6. Использовать формулу $\log_a b = 1 : \log_b a$. 9. $1 = (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)^3 = \sin^6\alpha + \cos^6\alpha + 3\sin^4\alpha\cos^2\alpha + 3\sin^2\alpha\cos^4\alpha = \sin^6\alpha + \cos^6\alpha +$

$+3\sin^2\alpha\cos^2\alpha=\sin^6\alpha+\cos^6\alpha+\frac{3}{4}\sin^2 2\alpha$. 11. 194. 12. Вычислить $\operatorname{tg}142°30'$, использовав равенство $142°30'=90°+45°+0{,}5\cdot 15°$. 13. Очевидно, $\log_6 16=4:\log_2 6=4:(1+\log_2 3)$. Далее, $m=\log_{12}27=3\log_{12}3=3:\log_3 12=3:(1+2\log_3 2)=3:\left(1+\frac{2}{\log_2 3}\right)=3\log_2 3:(2+\log_2 3)$. Отсюда $\log_2 3=2m:(3-m)$. Ответ: $\log_6 16=\frac{4(3-m)}{3+m}$. 14. 0. 16. Очевидно, $55+8\sqrt{39}=(4+\sqrt{39})^2$ и $103-16\sqrt{39}=(8-\sqrt{39})^2$. Ответ: 12.

§ 3

1. 1) $x_1=2$, $y_1=2$; $x_2=-2$, $y_2=-2$; $x_3=-2$, $y_3=2$; $x_4=2$, $y_4=-2$; $x_5=4\sqrt{0{,}4}$, $y_5=-2\sqrt{0{,}4}$; $x_6=-4\sqrt{0{,}4}$, $y_6=2\sqrt{0{,}4}$; 2) уравнения перемножить почленно; 3) разложить левые части уравнений на множители, затем преобразованные уравнения сложить почленно; 4) обозначим: $y+z=t$, $yz=u$. После исключения x получается легко решаемая система уравнений: $t^2-4t-u+1=0$, $t^2-4t+u+5=0$; 5) умножаем первое уравнение на y, второе — на x. После почленного вычитания полученных уравнений получим $8z^2x-4z^2y=0$, откуда $y=2x$. Дальнейшее решение очевидно. 2. После почленного вычитания третьего уравнения из второго и четвертого из второго получаем: $(y-x)(z+t)=0$, $(z-x)(y+t)=0$. Дальнейшее решение очевидно. 3. 1) $x\leqslant -2-\sqrt{2}$; $x\geqslant 1+\sqrt{3}$; 2) x — любое действительное число. 4. Система решений не имеет. Исследовать функцию $a=-x^4-4x^3+8x$ на $(4,+\infty)$.

6. Из первого уравнения $z=3-x-y$. Подставив это значение z во второе уравнение и выполнив очевидные преобразования, получим $(x-3)^2+(y-2)^2=0$. Отсюда $x=3$, $y=2$, затем найдем $z=-2$. 7. Рис. 132. 8. Рис. 133. $x=2$,

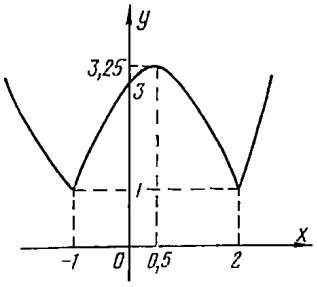


Рис. 132

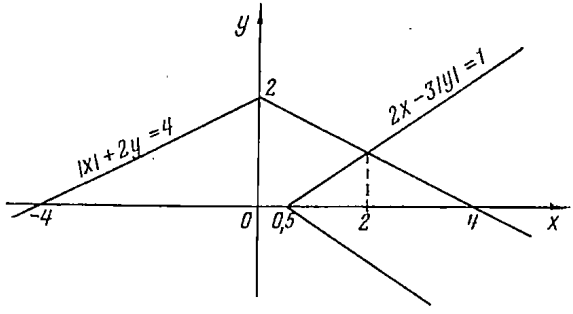


Рис. 133

$y=1$. 9. Пусть x_1 и x_2 — корни данного уравнения. Тогда $x_1\cdot x_2=c:a$, $x_1+x_2=-b:a$. Пусть x_1' и x_2' — корни нового уравнения. Тогда $(x-x_1')(x-x_2')=0$ или $(x-x_1-1)(x-x_2+1)=0$. Раскрыв скобки, получим искомое уравнение. 13. Да. 14. Сложить почленно данные уравнения. 15. 1) Рис. 134; 2) если $a<2$. 16. Решить данное уравнение относительно y. 17. 2) $x\geqslant 2$ и $x\leqslant -3$. 18. $a>1$. 20. По теореме Виета $x_1\cdot x_2=q$, $x_1+x_2=-p$, $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1\cdot x_2=p^2+2q$. 21. Рис. 135. 22. $x_1=3$, $y_1=-2$; $x_2=-3$, $y_2=2$; $x_3=2$, $y_3=-3$; $x_4=-2$, $y_4=3$. 23. Рассмотреть значения функции при $x=0$, 1, -1. 24. Использовать формулу Виета: $-15<q<-8$; $-3<-p<-1$.

25. $(x+y+z)_2 = x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz = a+2(xy+yz+xz) = 0$, (а)

$$(x^2+y^2+z^2)^2 = a^2 = x^4+y^4+z^4+2x^2y^2+2x^2z^2+2y^2z^2.$$

Отсюда

$$x^4+y^4+z^4 = a^2-2(x^2y^2+x^2z^2+y^2z^2). \quad (б)$$

Из равенства (а)

$$xy+yz+xz = -0,5a;\ (xy+yz+zx)^2 = 0,25a^2$$

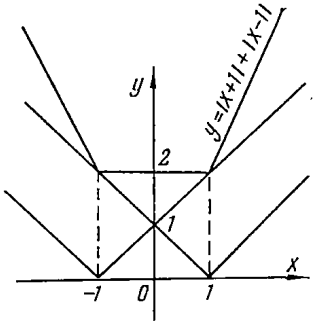


Рис. 134

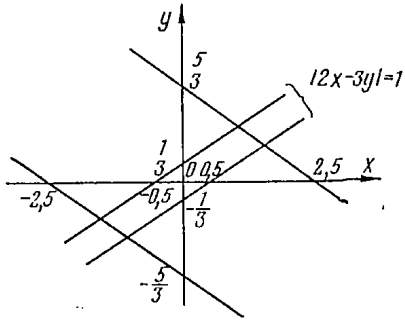


Рис. 135

или

$$x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+2xy^2z+2x^2yz+2xyz^2 = 0,25a^2. \quad (в)$$

Отсюда $x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2 = 0,25a^2-2xyz(y+x+z) = 0,25a^2-0 = 0,25a^2$. Из равенств (в) и (б) $x^4+y^4+z^4 = 0,5a^2$.

26. $x_1' = x_1+x_2 = -b:a$, $x_2' = x_1\cdot x_2 = c:a$. Поэтому $(x-x_1')(x-x_2') = \left(x+\frac{b}{a}\right)\left(x-\frac{c}{a}\right) = 0$. 27. 1) Если дискриминант данного квадратного трехчлена меньше нуля; 2) если дискриминант равен нулю.

28. Если $a = 5:9$, то $-\infty < x < +\infty$. Если $a > 5:9$, то $x < 63:(9a-5)$. Если $a < 5:9$, то $x > 63:(9a-5)$. 30. Рис 136. 31. $y_{\min} = y(a_2) = a_3 - a_1$. 32. $a \geqslant 3$. Решить данное уравнение относительно a и исследовать a как функцию от x. 34. Выразить x^3 из первого уравнения и подставить его значение во второе уравнение. 35. 1. Графики функций y_1, y_2 касаются в точке, абсцисса которой является корнем данного уравнения, поэтому касательные к этим графикам в этой точке совпадают.

§ 4

1. 1) Выразить $x+y$ и xy из первого и второго уравнений и подставит в третье. 2. 1) Рис. 137. 3. Если $a = \pm 3$, то $x = 0,5$; если $a \neq \pm 1$, $a \neq \pm 3$, то $x_1 = (a+1):(a-1)$ и $x_2 = (a-1):(a+1)$. 4. 1) Рис. 138; 2) $a = 0,75$. 5. 1) Рис. 139; 2) четыре; 3) да, если $a = |OA|$, где A — точка пересечения гиперболы с биссектрисой первого или третьего координатных углов. 7. 1) График y_3 см. на рис. 140; 2) если $0,5 < a < 1$, $1 < a < 2$. 8. $0 < x < 3$, $x < 0$. Рассмотреть это неравенство, если: 1) $x > 3$; 2) $0 \leqslant x < 3$; 3) $x < 0$. 9. $-3 < p < 6$. 10. Рис. 141. 11. Рис. 142. 12. Раскрыть скобки в выражениях $(x+x^{-1})^2$ и $(x+x^{-1})^3$ и сравнить результат с исходным уравнением. 13. 1) Гра-

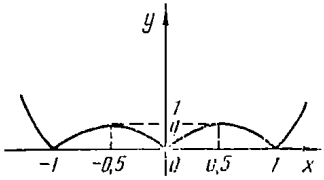


Рис. 136

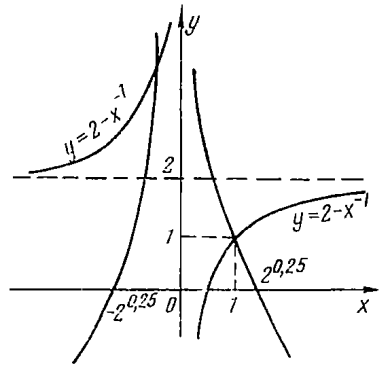


Рис. 137

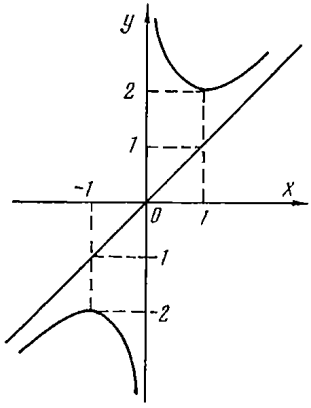


Рис. 138

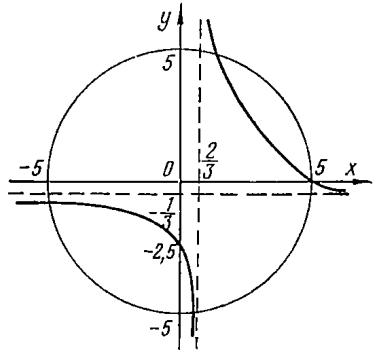


Рис. 139

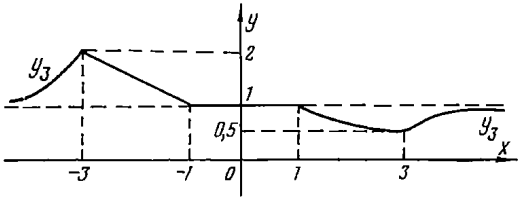


Рис. 140

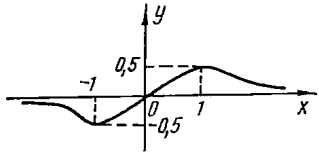


Рис. 141

фик y_3 см. на рис. 143; 2) одно. 14. Разложить трехчлен $x^2 - |x| - 2$ на множители для $x < 0$ и $x > 0$. 15. $a < -2$ и $a > 0{,}5\,(1 + \sqrt{5})$. 17. 2) и 3). Если $a \geqslant 0$, то $x > 0$ и $-a < x < -0{,}5a$; если $a < 0$, то $0 < x < -0{,}5a$ и $x > -a$. 18. Если $a = -3$, то $-\infty < x < +\infty$; если $a > -3$, то $-4 : (a+3) < x < 14 : (a+3)$; если $a < -3$, то $14 : (a+3) < x < -4 : (a+3)$. 19. Обозначить $y = x^3 : (x^3 + 1)$ и решить данное уравнение относительно a. 20. Если

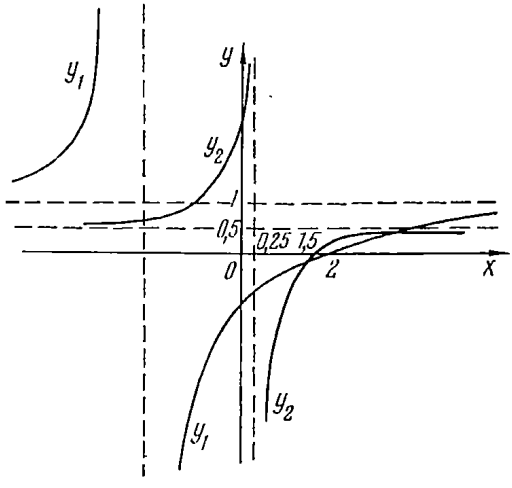


Рис. 142

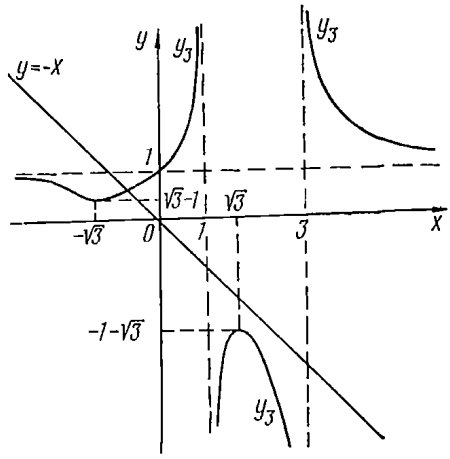


Рис. 143

$a = 10$, то $x < 8$; если $a > 10$, то $\dfrac{3 + 16a}{2\,(10 - a)} < x < \dfrac{4a}{5}$; если $a < 10$, то $x < 4a : 5$ и $x > (3 + 16\,a) : 2\,(10 - a)$. 21. $9 : 8 < a < 71 : 24$. 23. 1) Записать систему в виде

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{yz} + \frac{1}{xz} &= \frac{7}{12}, \\ \frac{1}{xz} + \frac{1}{xy} &= \frac{5}{12}, \\ \frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} &= \frac{1}{3}, \end{aligned}\right\}$$

из этой системы определить $\dfrac{1}{xy}$, $\dfrac{1}{xz}$, $\dfrac{1}{yz}$; 2) обозначить $\dfrac{xy}{z} = u$, $\dfrac{zx}{y} = v$, $\dfrac{yz}{x} = t$.

§ 5

1. Рис. 144. 2. Функции $\varphi(x) = (x + 8)^{0{,}25}$ и $f(x) = 2 + (x - 8)^{0{,}25}$ определены при $x \geqslant 8$, обе монотонно возрастающие и непрерывные, причем $\varphi(8) = f(8)$ и при любом $x > 8$ $(x + 8)^{0{,}25} - (x - 8)^{0{,}25} > 0$. Поэтому данное уравнение имеет только один корень $x = 8$. 3. 1) Обозначить $x^3 + x^2 + 0{,}5 = t$; $x = 1$ 2) $a < \sqrt{3}$. 6. $-26 \leqslant x \leqslant -1$. 7. 1) Рис. 145. Преобразовать функцию к виду

$y = \sqrt{\dfrac{(x-3)(x-4)}{(x+1)(x-3)}}$. Отсюда видно, что функция $f(x) = \dfrac{(x-3)(x-4)}{(x+1)(x-3)}$ определена при всех $x \neq 3, -1$. Далее, $\varphi(x) = (x-4):(x+1) \geqslant 0$ на $(-\infty, -1)$ и $(4, +\infty)$. 9. 2) Множество решений пустое, если $a < 0$. Уравнение имеет два решения, если $a \geqslant 3$. Уравнение имеет одно решение, если $0 \leqslant a < 3$. 10. 1) Рис. 146; 2) $x < -2$, $0 < x < 1$, $x > 1$. 11. Преобразовать данное не-

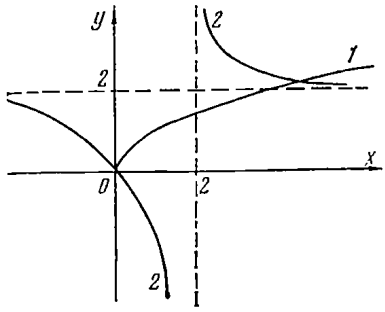


Рис. 144

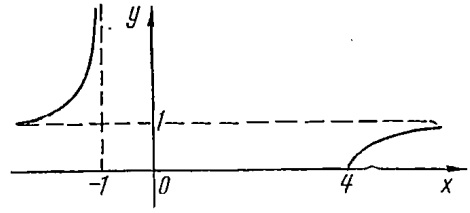


Рис. 145

равенство к виду $\dfrac{x-7}{2\,[(x-0{,}75)(x-4)]^{0,5}} < 0$. Теперь понятно, что оно верно, если $x < 0{,}75$ или $4 < x < 7$. 12. 1) Рис. 147; 2) $a \geqslant \sqrt{5}$. 13. 1) Рис. 148 (графики изображены для $a = 4, 9, 16$); 2) при $a \geqslant 4$. 15. Если $a = 0$, то $x = 0$; если $a \geqslant 1$, то $x = 0{,}25\,(a-1)^2$. 16. 2) Если $0 \leqslant a < 0{,}5$ или $a \geqslant 1$, то $x = a^2:(2a-1)$. 17. 2) Если $a < \sqrt{2} - 1$, то решений нет; если $a = \sqrt{2} - 1$, то $x = 0{,}5\sqrt{2}$; если $\sqrt{2} - 1 < a \leqslant 0{,}5$, то $x_{1,2} = 0{,}5\,(a + 1 \pm \sqrt{a^2 + 2a - 1})$; если $a > 0{,}5$, то $x = 0{,}5\,(a + 1 - \sqrt{a^2 + 2a - 1})$. 18. Если $a > 1$, то $x =$

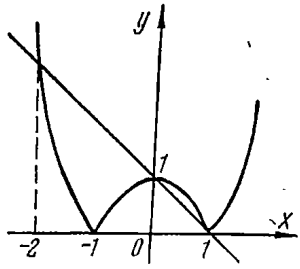


Рис. 146

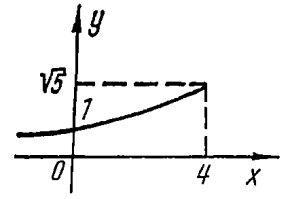


Рис. 147

$= a:(a^{\frac{2}{3}} - 1)$; если $a \leqslant 1$, то решений нет. 20. 1) Функции $y = (2x-6)^{0,5}$ и $y = (x+4)^{0,5}$ монотонные; 2) если $a < 0{,}2\sqrt{7}$. 22. 1) Обозначить $(2x+1):(x-1) = t^2$. 23. $2 < x < 3$. 24. $x < 1$. 25. 2) Один корень при любом значении $|a| > 2^{0,5}$. Два корня, если $|a| \leqslant \sqrt{2}$. 26. Если $a = 0$, то $x = \pm 1$, т. е.

два решения; если $a \neq 0$, то $x = 1$, т. е. одно решение. 28. Обозначить $x - y = t$, $x + y - 2 = v$. Тогда $t = 0$; 1, т. е. $x = y$, $x - y = 1$. Кроме того, очевидно, что $v = 6$. Других решений, кроме $v = 6$, уравнение $(v+2)^{\frac{1}{3}} = (v-2)^{0,5}$ не имеет, так как обе части его являются монотонными функциями. 29. $a > \sqrt{\frac{94}{3}} - \sqrt{\frac{14}{3}}$. 30. $x = -4$, $y = 6$. Обозначить $\sqrt{x+y} = t$,

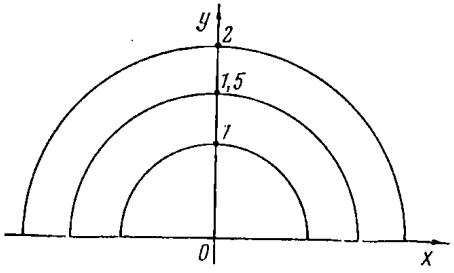


Рис. 148

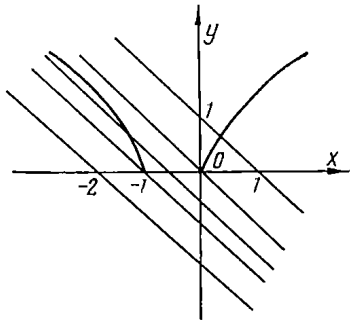


Рис. 149

$\sqrt{x+2y} = v$. 31. При $a \geqslant \sqrt{\frac{2}{3+\sqrt{33}}}$. Построить графики функций $y = \sqrt{x - \sqrt{x+8}}$ и $y = a\sqrt{x+1}$ при некоторых положительных значениях a (с применением производной!). 32. 3) $y = 1 - |1-x| + \sqrt{x - |x|} + \sqrt{1-x-|1-x|}$ (рис. 45); 4) $|y| = |x|$. 33. 1) Рис. 149; 2) если $a \leqslant -1$, то решений нет; если

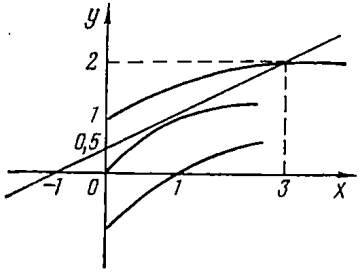


Рис. 150

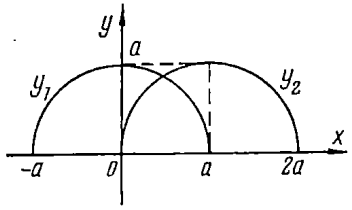


Рис. 151

$-1 < a < -0,5$, то $a^2 : (1+2a) < x \leqslant -1$; если $-0,5 \leqslant a \leqslant 0$, то $x \leqslant -1$; если $a > 0$, то $x \leqslant -1$ и $0 \leqslant x < a^2 : (1+2a)$. 34. 1) Рис. 150; 2) если $a \leqslant 0$, то решений нет; если $0 < a \leqslant 1$, то $1 - 2\sqrt{a} < x < 1 + 2\sqrt{a}$; если $a > 1$, то $-a < x < 1 + 2\sqrt{a}$. 35. 2) Если $a \leqslant 0$ или $a > 1$, то $x \geqslant 1$; если $a = 1$, то $x > 1$; если $0 < a < 1$, то $x > (a^2+1) : a$. 36. Рис. 151. 37. $x = 5 : 8$, $y = 3 : 8$. 38. $x = 0$, $y = -1$.

§ 6

2. $x_1 = 1$, $x_2 = 4$. 3. 3) $a \leqslant 2{,}25$. Обозначить $3^x = t$ и построить график функции $a = 3t - t^2$. 4. Рис. 152. 5. $4\,(x \leqslant -1)$. 6. $x = \sqrt[5]{9:5}$, $y = 5\log_{\frac{9}{5}} 3 - 2$. Возвести правую и левую часть второго уравнения в квадрат. 7. 2) Если $a \leqslant 1$, то $1 - \sqrt{9-a} < x < 1 - \sqrt{1-a}$ или $1 + \sqrt{1-a} < x < 1 + \sqrt{9-a}$; если $1 < a < 9$, то $1 - \sqrt{9-a} < x < 1 + \sqrt{9-a}$; если $a \geqslant 9$, то решений нет.

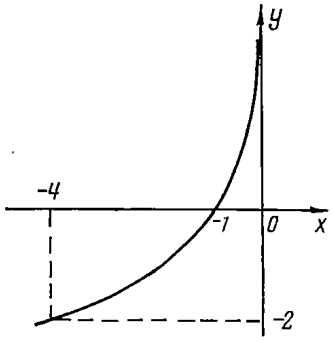


Рис. 152

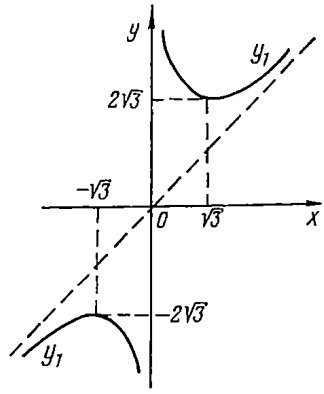


Рис. 153

8. 2) $(-3; 1)$; 3) $(-3; 0{,}5\,(-3-\sqrt{5}))$ и $(0{,}5\,(-3+\sqrt{5}); 1)$. 9. 4) $(-\infty; -1)$. 10. $-\pi < x < -3$; $-3 < x < -0{,}5\pi$; $0 < x < 0{,}5\pi$; $\pi < x < \sqrt{10}$. 11. 2) $(0; 0{,}5)$ и $(1; +\infty)$; 3) $x_1 = 0{,}5\,(3-\sqrt{5})$; $x_2 = 0{,}5\,(3+\sqrt{5})$; 4) $(0{,}5\,(3-\sqrt{5}); 0{,}5)$ и $(1; 0{,}5\,(3+\sqrt{5}))$. 12. 2) $(0{,}5; 1)$; 3) $(a; 1)$. 13. 2) $a^{-1} < x < a$. 14. Прологарифмировать правую и левую части уравнений. 15. 1) График y_1 см. на рис. 153; 2) $x = 9$. 16. Один. Преобразовать данное уравнение к виду $x = 8\,(2^{-x}+1):(2^x+1)$. Построить графики функций $y = x:8$ и $y = (2^{-x}+1):(2^x+1)$. 17. $x < 2$ или $x > 3$. 18. $\log_2 1{,}5 < x < 2$. Использовать равенство $x = \log_2 2^x$. Выражение $\log_2(2^{x+1}-3)$ имеет смысл, если $2^{x+1} - 3 > 0$. 20. 1) Преобразовать сначала алгебраические суммы, определяющие y_1 и y_2, в произведение; 4) $x < 1{,}5$. 21. $(-\infty; 0)$ и $(0; 0{,}25)$. Решить данное уравнение относительно a и найти область изменения a как функции x. 22. Прологарифмировать обе части неравенства (в качестве основания логарифма взять 10). 23. $16^{-\frac{1}{3}} < x < 0{,}5$ или $x > 1$. Использовать формулу $\log_b a = 1 : \log_a b$ $(a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $b \neq 1)$. 24. $x = a + 1$ и $x = a - 1$, если $a > 1$, $a \neq \sqrt{2}$, $a \neq 2$; если $a = 2$, то $x = 3$. При остальных значениях a уравнение не имеет смысла. 25. 1) Рис. 154; 2) если $a < 0$, то $1 < x < 0{,}5\,(1+\sqrt{1-4a})$; если $a = 0$, то решений нет; если $0 < a \leqslant 0{,}25$, то $a < x < 0{,}5\,(1-\sqrt{1-4a})$ или $0{,}5\,(1+\sqrt{1-4a}) < x < 1$; если $0{,}25 < a < 1$, то $a < x < 1$; если $a \geqslant 1$, то решений нет. 26. 2) Если $a \leqslant 0$ или $a = 0{,}5$, то решений нет; если $0 < a < 0{,}5$, то $1 - \sqrt{1-a} < x < 1 + \sqrt{1-a}$; если $0{,}5 < a \leqslant 1$, то $1 - \sqrt{1+a} < x < \sqrt{1-a}$

или $1+\sqrt{1-a}<x<1+\sqrt{1+a}$; если $a>1$, то $1-\sqrt{1+a}<x<1+\sqrt{1+a}$. 27. 1) (2,1); 2) $\left(1,1,\frac{4}{9}\right)$; $\left(256,16,\frac{4}{3}\right)$; 3) (2,1); (4,2); 4) (4; 0,25); 5) (1,2); $(-\sqrt{5},0)$; $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{3}{\sqrt{2}}\right)$; 6) если $a=b$, то $x=y=c$ (c — любое положительное число); если $b=1:a$, то $x=c$, $y=1:c$ (c — любое положительное число); если $a\neq b$ и $b\neq 1:a$, то $x=1:a$ и $y=1:b$.

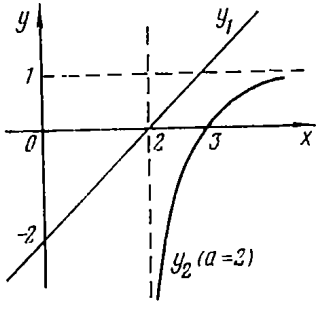


Рис. 154

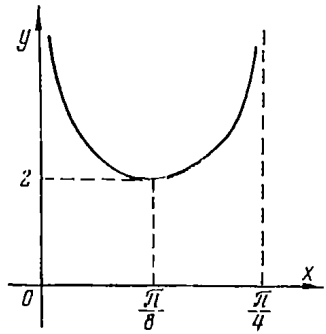


Рис. 155

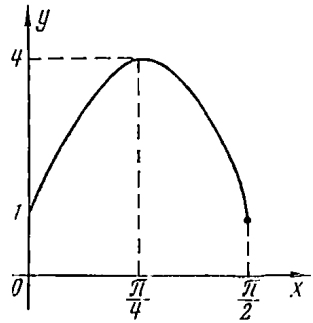


Рис. 156

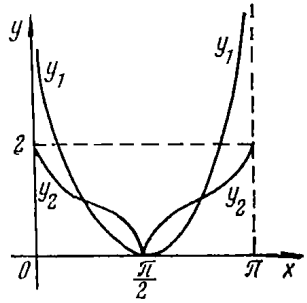


Рис. 157

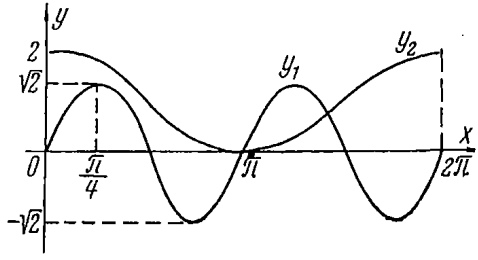


Рис. 158

§ 7

1. 1) Рис. 155. После преобразования данная функция принимает вид: $y=2:\sin 4\alpha$; 2) $\frac{\pi}{24}<\alpha<\frac{5\pi}{24}$. 3. 1) Рис. 156. После тождественных преобразований функция принимает вид:

$$y=\frac{1}{(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)^6-3\sin^4\alpha\cos^2\alpha-3\sin^2\alpha\cos^4\alpha}=\frac{1}{1-3\sin^2\alpha\cos^2\alpha}=$$
$$=\frac{1}{1-0{,}75\sin^2 2\alpha}.$$

4. $x_1 = \frac{\pi k}{4}$, $x_2 = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k$. Преобразовать левую часть уравнения в произведение. 5. 3) $x_1 = 0{,}5\,\pi\,(2k+1)$; $x_2 = \operatorname{arctg} 4 + \pi k$. 6. 3) $x = 0{,}25\,\pi + \pi k$. 8. Рис. 157. $x_1 = 0{,}25\pi\,(2k+1)$, $x_2 = 0{,}5\pi\,(2k+1)$. 9. $x_1 = 0{,}5\pi k$, $x_2 = \frac{\pi}{24}\,(2k+1)$. 10. $x = \pi k - 2$. Преобразовать данное уравнение к виду $\operatorname{tg}(x+1) = \operatorname{tg}(2x+3)$, откуда $2x + 3 = x + 1 + k\pi$. 11. $4k\pi < x < 4\pi\,(k+1)$.

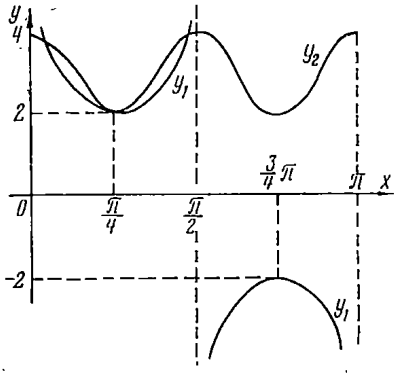


Рис. 159

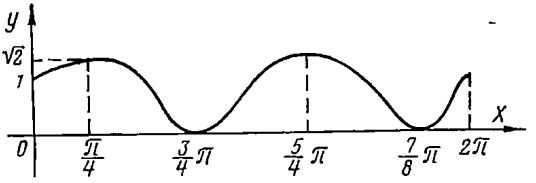


Рис. 160

12. 2) $x = 0{,}25\pi + \pi k$. 13. 1) Рис. 158; 2) $x_1 = \pi$, $x_2 = \arccos\frac{1}{3} - \pi$. 15. $t_{1,2} = 0{,}5\,(1 + 4k \pm \sqrt{1+8k})$; $k = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$ Преобразовать данное уравнение к виду $\sin \pi\sqrt{t} = \sin(-\pi t)$. 16. 1) Рис. 159; 2) $0 < x < 0{,}5 \arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ и $0{,}5\left(\pi - \arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) < x < 0{,}5\pi$. 17. $x = \frac{\pi\,(2k+1)}{4}$. 18. 1) Рис. 160; 2) $\pi k < x < 0{,}5\pi + \pi k$. 19. 1) Рис. 161. 20. $a = \frac{1}{16}$. 21. $a = b = c = d = 1$. 22. $x = 0{,}5\pi + k\pi$, $y = \frac{-7\pi}{6} + k\pi$. 23. $x = 0{,}5\pi\,(1+4k)$. Построив на $[0, 2\pi]$ графики функций $y = \sin^5 x + \cos^5 x$ и $y = 2 - \sin^4 x$, вы обнаружите, что они пересекаются в точке $x = \frac{\pi}{2}$. Докажите, что других решений на $[0, 2\pi]$ данное уравнение не имеет. 24. $x = \pm\frac{\pi}{4} + \pi k_1$, $y = \pm\frac{\pi}{4} + \pi k_2$, где k_1 и k_2 различной четности. 25. 1) Рис. 162; 2) $x_1 = 0{,}5\pi$; $x_2 = \frac{\pi}{8}$. 26. Решений нет. Очевидно, что данное уравнение эквивалентно системе двух уравнений:

$$\left.\begin{aligned} |\sin x| &= 1, \\ |\sin 7x| &= 1. \end{aligned}\right\}$$

27. Ни одного. Построить графики левой и правой части данного уравнения на

$[0, \pi]$. **28.** $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$. **29.** Если $a \neq (2k+1)\pi$, то $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n - \frac{a}{2}$; если $a = (2k+1)\pi$, то x — любое действительное число. Преобразовать левую часть уравнения в произведение. **30.** Если $-5 \leqslant a \leqslant 3$, то $x = (-1)^k \arcsin(\sqrt{4-a} - 2) + \pi k$. Обозначить $\sin x = y$ и построить график функции $a = -y^2 - 4y$ на промежутке $[-1, 1]$. **31.** Если $a = \frac{4n}{4k+1}$, то $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$. Данное уравнение эквивалентно системе уравнений:

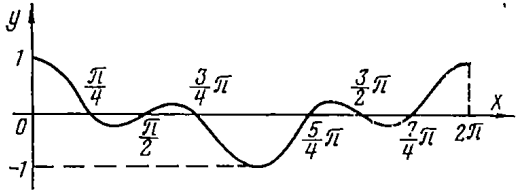


Рис. 161

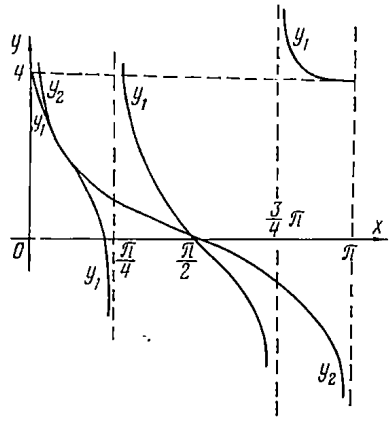


Рис. 162

$$\left.\begin{aligned} \sin x &= 1, \\ \cos ax &= 1. \end{aligned}\right\}$$

32. Если $-2 < a < \sqrt{8}$, то решений нет; если $a \geqslant \sqrt{8}$ или $a < -\sqrt{8}$, то $x = \pm \arccos(\sqrt{2})^{a - \sqrt{2a^2-8}} + 2\pi n$; если $-\sqrt{8} \leqslant a \leqslant -2$, то $x = \pm \arccos(\sqrt{2})^{a \pm \sqrt{2a^2-8}} + 2\pi n$. Обозначить $y = \log_2 \cos x$. **33.** $2k\pi < x < 0{,}5\pi + 2k\pi$. Из всего промежутка $[0, 2\pi]$ левая часть неравенства определена только на $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. **34.** $x_1 = (-1)^k \frac{\pi}{3} + 2k\pi$, $y_1 = \frac{\pi}{2} + (-1)^{k+1} \frac{\pi}{6} + (2n-k)\pi$; $x_2 = (-1)^{k+1} \frac{\pi}{3} + 2k\pi$, $y_2 = -\frac{\pi}{2} + (-1)^k \frac{\pi}{6} + (2n-k)\pi$.

Преобразовать данное уравнение с двумя переменными к виду

$$\cos x + \cos y = 0{,}5 + [1 + \cos(x+y)].$$

Далее,

$$2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} = 0{,}5 + 2\cos^2\frac{x+y}{2}.$$

Отсюда

$$\cos\frac{x+y}{2}\left(\cos\frac{x-y}{2} - \cos\frac{x+y}{2}\right) = 0{,}25.$$

Обозначим $\cos\frac{x+y}{2}=u$, $\cos\frac{x-y}{2}=t$. Тогда уравнение принимает вид $u(t-u)=0{,}25$. Отсюда

$$t=\frac{0{,}25+u^2}{u}\quad(|t|\leqslant 1).$$

Построив график последнего уравнения, убеждаемся, что его решениями являются $u_1=-0{,}5$; $t_1=-1$; $u_2=0{,}5$; $t_2=1$.

Таким образом, данное уравнение эквивалентно двум системам уравнений:

$$\left.\begin{aligned}\cos\frac{x+y}{2}&=-0{,}5;\\ \cos\frac{x-y}{2}&=-1;\end{aligned}\right\}\qquad\left.\begin{aligned}\cos\frac{x+y}{2}&=0{,}5;\\ \cos\frac{x-y}{2}&=1.\end{aligned}\right\}$$

35. $a=k\pi$ $(k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots)$. 36. $x=\pm\frac{\pi}{8}$, $y=\mp\frac{\pi}{8}$. Рассмотреть случаи: $x>0$, $y>0$; $x<0$, $y<0$; $x>0$, $y<0$; $x<0$, $y>0$. Во всех четырех случаях система уравнений решается методом подстановки. 39. Шесть. 40. $x=0$. 41. $x=\frac{\pi}{4}+2k\pi$. 42. $x_1=0{,}4k\pi$, $x_2=(2k+1)\pi$; $y(x_1)=y(x_2)=1$. 43. $x=\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi$. Применить формулу $1+\cos 2x=2\cos^2 x$. 44. x — любое действительное число, кроме $x=\frac{k\pi}{2}$. 45. $x=\pm 3$, $y=\pi(4k-1)/18$. Решить данное уравнение относительно $\sin(3xy)$. Доказать, что это равенство верно только в том случае, если $\sin(3xy)=\pm 1$. 46. $x_1=0$, $x_{2,3}=\pm 1$, $x_{4,5}=\pm\sqrt{10}$. 47. $x=-2$, $y=\frac{\pi(2k+1)}{2}$. Преобразовать правую часть данного уравнения к виду $\frac{10}{\left|\sin\frac{2y}{x}\right|}$. Отсюда ясно, что правая часть уравнения изменяется от 10 до $+\infty$. Левая часть уравнения не больше 10. 48. $z=0{,}5$. 49. Сначала решим уравнение относительно $\sin 4x$:

$$\sin 4x=\cos^4 x\pm\sqrt{\cos^8 x-\cos^2 x}.$$

Очевидно, что корень существует только тогда, если $\cos x=0$ или $\cos x=1$. Во всех других случаях под корнем отрицательное число. 50. $x=0;\ \frac{\pi}{6};\ \frac{5\pi}{6}$. 51. a — рациональное число. Данное уравнение эквивалентно системе уравнений:

$$\left.\begin{aligned}\sin ax&=0,\\ \cos x&=1.\end{aligned}\right\}$$

52. Если $a\neq\pm\sqrt{2}$, то $x=\frac{\pi}{4}+k\pi$; если $a=\sqrt{2}$, то $x=\frac{\pi}{4}+2\pi n$. Если $a=-\sqrt{2}$, то $x=\frac{\pi}{4}+\pi(2n+1)$; k, $n=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots$ Рассмотреть случаи: $a=0$; $\cos x\neq -a$ и $\sin x\neq -a^{-1}$. 53. $x=\frac{\pi(2k+1)}{4}$; $y\left(\frac{\pi}{4}\right)=4$. 54. $x_1=-\frac{\pi}{2}$. $x_2=\frac{\pi}{2}$; $\cos 2x=2\cos^2 x-1$. Поэтому первое уравнение сводится к

уравнению $3^{-2\cos^2 x} - 3^{2\cos^2 x - 1} = \frac{2}{3}$. 55. $\varphi = \frac{\pi}{6}$; $m = 2$. Выразить сначала $\operatorname{tg}\varphi$ через $\cos 2\varphi$. 56. $x_1 = 1$, $x_2 = 2$. Целые значения x находятся среди решений системы неравенств:

$$\left.\begin{array}{l} 1 - \sin x \geqslant 0, \\ -3x^2 + 10x - 3 > 0. \\ -3x^2 + 10x - 3 \neq 1. \end{array}\right\}$$

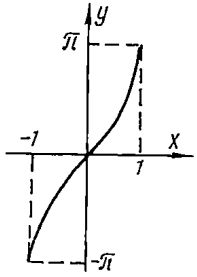


Рис. 163

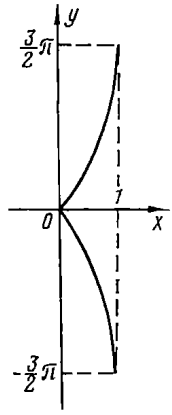


Рис. 164

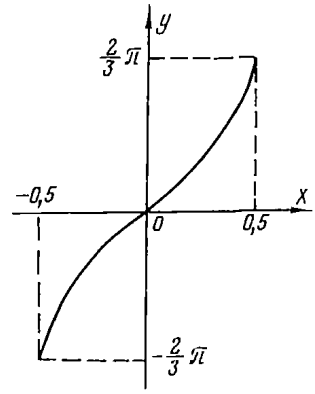


Рис. 165

57. $\sin\left(\arcsin\frac{1}{3} + \arcsin\frac{3}{4}\right) = \sin\left(\arcsin\frac{1}{3}\right)\cos\left(\arcsin\frac{3}{4}\right) +$
$+ \cos\left(\operatorname{ascsin}\frac{1}{3}\right)\sin\left(\arcsin\frac{3}{4}\right) = \frac{1}{3}\sqrt{1 - \sin^2\left(\arcsin\frac{3}{4}\right)} +$
$+ \sqrt{1 - \sin^2\left(\arcsin\frac{1}{3}\right)}\,\frac{3}{4} = \frac{1}{3}\sqrt{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2} + \sqrt{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2}\,\frac{3}{4} =$
$= \frac{\sqrt{7} + 3\sqrt{8}}{12}$. 58. $3\pi - 10$. 59. 1) Рис. 163; 2) $-\pi \leqslant a$. π. 60. 1) Рис. 164
2) $x = 0{,}75$. 61. $x = \frac{-1 + \sqrt{3}}{2}$. 62. 1) Рис. 165; 2) $x = 0{,}5\sqrt{\frac{3}{7}}$. 63. $x =$
$= 0{,}5$. $\cos(\arccos x\sqrt{3} + \arccos x) = \cos\frac{\pi}{2}$ и т. д. 64. 1) $\cos\frac{\pi}{18} < x \leqslant 1$;
2) $\sqrt{\frac{\sqrt{5} - 1}{2}} < x \leqslant 1$. 65. 1) Рис. 166; 2) $x = 0$. 66. $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = -1$.
67. 2) $0 \leqslant x \leqslant 1$. 68. 1) Рис. 167; 2) $2k\pi \leqslant x \leqslant 2k\pi + \frac{\pi}{2}$. 69. 1) $-1 \leqslant x <$
$< 1 - \sqrt{3 + 2^{-0,5}}$; $1 + \sqrt{3 + 2^{-0,5}} < x \leqslant 3$; 2) $0 < x \leqslant 1$; 3) $0 < x \leqslant 2$;
4) $x < 1$; 5) $0 < x < 1$; 6) $-0{,}5 \leqslant x < 0$; $0 < x \leqslant 0{,}5$; 7) если $-1 \leqslant a < 0$, то
$-1 \leqslant x \leqslant 1$; если $0 \leqslant a < 1$, то $-1 \leqslant x < 1 - 2a^2$; при $a = 0$ решений
неравенство не имеет; 8) если $a \leqslant 0$, то решений неравенство не имеет;

если $a > 0$, то $x > \frac{1}{2}a$. 70. 1) $x = \pi\left(\frac{n}{2} - k - \frac{1}{4}\right)$; $y = \pi\left(\frac{n}{2} + k + \frac{1}{4}\right)$; 2) $x = 2\pi k$, $y = \pi(2m + 1)$; 3) из первого уравнения следует $\cos(x + y) = 0$, т. е. $x + y = \frac{\pi}{2} + \pi n$. Дальнейшее решение системы очевидно; 4) после почленного умножения уравнений и преобразования произведений синусов в суммы получим $\cos(3x + y) = \cos(x + 3y)$. Откуда $3x + y = \pm(x + 3y) + 2\pi n$. Дальнейшее решение системы очевидно. 71. $x = \operatorname{arctg}\frac{3 + \sqrt{5}}{2} + \pi n$. 72. $0 \leqslant x \leqslant \arccos\frac{\sqrt{6} - 1}{2}$. 73. $\frac{\sqrt{5} - 1}{2} \leqslant a \leqslant 1$. 74. $\frac{\pi}{12} < x < \frac{\pi}{4}$; $\frac{\pi}{4} < x < \frac{5\pi}{12}$. 75. $0 < x \leqslant \operatorname{arctg}(\sqrt{2} - 1)$; $\operatorname{arctg} 0{,}5 < x < \frac{\pi}{4}$; $\pi < x \leqslant \operatorname{arctg}(\sqrt{2} - 1) + \pi$; $\operatorname{arctg} 0{,}5 + \pi < x < \frac{5\pi}{4}$. 76. Если $0 \leqslant |a| \leqslant \frac{2}{3}$ или $1 < |a| < \sqrt{2}$, то система уравнений решений не имеет; если $|a| = \frac{2}{3}$ или $|a| = \sqrt{2}$, то система уравнений имеет одно решение; если $\frac{2}{3} < |a| < 1$, $\sqrt{2} < |a| < 3$ или $4k - 3 < |a| < 4k - 1$ $(k = 2, 3, 4, \ldots)$, то система уравнений имеет два решения. Если $4p - 1 < |a| < 4p + 1$ $(p = 1, 2, 3, \ldots)$, то система уравнений имеет четыре решения.

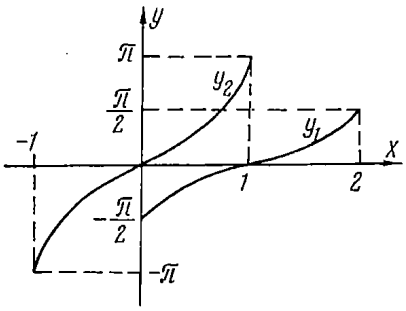


Рис. 166

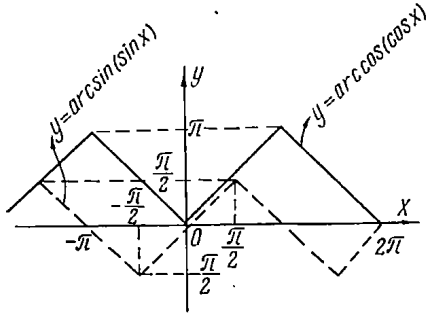


Рис. 167

Гл. 4

§ 1

1. 40 км. 2. $\sqrt{ab}$. 3. По условию задачи $2\pi xy - 2\pi x^2 = 2\pi$. Отсюда $y = x + x^{-1}$. 4. $|AB| = 30$ км; $v_1 = 30$ км/ч, $v_2 = 20$ км/ч. 5. $|AB| = 1008$ км. 6. Иванов в первую и во вторую неделю вырабатывал по 28 деталей в час. Петров в первую неделю вырабатывал 28 деталей в час, а во вторую и третью — по 32 детали в час. Новиков вырабатывал (в третью неделю) 22 детали в час. В первую неделю план был выполнен на 114,8%, во вторую — на 100,6%, в третью — на 109,6%. 7. 1,1 ц. 8. 25 раз и 15 раз. 9. «2» — 11, «3» — 7,

«4» — 10, «5» — 2. Пусть x, y, a, b — соответственно количество «2», «3», «4» и «5». Тогда, по условию задачи, $x+y+a+b=30$, $2x+3y+4a+5b=93$, $b<y<a$. Причем b делится на 2, a — на 10. Очевидно, $a\neq 0$. Из первых двух уравнений имеем $y+2a+3b=33$. Отсюда следует, что $a\neq 20$. Поэтому $a=10$. Дальнейшее решение очевидно. 10. Пусть школьник имеет x монет по 1 коп., y монет по 2 коп., a монет по 3 коп., b монет по 5 коп. и c монет по 10 коп. По условию задачи $c-x-y-a-b=4$, $x+2y+3a+5b+10c=100$ и, кроме того, имеет место один из случаев: 1) $x=b=0$, 2) $x=y=a=0$. В первом случае имеем систему уравнений: $a=108-12c$, $y=c-a-4$. Так как $a\neq 0$, то эта система не имеет решений. Во втором случае получаем систему уравнений: $c-b=4$, $5b+10c=100$. Отсюда получаем $c=4$, $b=4$. 11. Очевидно, $K=3k+p$, где k — некоторое натуральное число, $p=1,2$. По условию задачи $\frac{K^2+9}{k}=130$ или $9k^2+6kp+p^2+9-130k=0$. Непосредственной проверкой убеждаемся, что при $p=1$ это уравнение не имеет решений в натуральных числах. При $p=2$ получаем уравнение $9k^2-118k+13=0$, которое имеет только одно целое решение $k=13$. Поэтому $K=3\cdot 13+2=41$. 12. В полтора раза. 13. 400 деталей. 14. 4 км/ч. 15. Сначала число пассажиров будет убывать: после первой остановки на 45 человек, после второй на 35, после третьей на 25, после четвертой на 15, после пятой на 5 человек. Итак, после пяти остановок в поезде будет $462-125=337$ человек. После шестой остановки число пассажиров увеличится на 5, после седьмой — на 15 и т. д. Поэтому наименьшее число пассажиров, которое может прибыть в B, равно 337 — и это в случае, если между A и B есть 5 остановок.

16. Если ввести один новый вид продукции, то предприятие будет приносить убыток в 11 тыс. руб. в год. При внедрении в том же году еще одного нового вида предприятие принесет убыток в 1 тыс. руб. При внедрении в производство в том же году третьего вида продукции доход в 25 тыс. руб. от внедрения этого вида продукции будет, по условию задачи, компенсирован расходом в те же 25 тыс. руб., поэтому оно опять будет приносить убыток в 1 тыс. руб. Кроме того, доход (25 тыс. руб.) будет меньше расхода (35 тыс. руб.) и убыток в год вырастет до 11 тыс. руб. и в дальнейшем будет расти. Поэтому указанным способом можно только снизить убытки в год до 1 тыс. руб., но доходным производство сделать нельзя.

Упражнения к гл. 4

1. Положим рядом с нашими часами справа другие, воображаемые, которые идут в 12 раз быстрее. Пустим эти часы одновременно, когда они показывают 12 часов. Тогда часовая стрелка «правых» часов все время совпадает с минутной стрелкой «левых» часов. «Неразличимые» положения стрелок — в точности те, когда часовая стрелка «левых» часов совпадает с минутной стрелкой «правых» часов. Сколько же раз это произойдет? Из 144 оборотов, которые сделает минутная стрелка «правых» часов за то время, пока часовая стрелка «левых» часов сделает один оборот, на каждом обороте произойдет одно совпадение (включая начальную точку первого оборота). Из них следует исключить 12 случаев, когда совпадают все четыре стрелки. Итак, таких положений существует 132. 2. Рассмотрим числа 2^0-1, 2^1-1, ..., 2^a-1. Этих чисел $(a+1)$. Какие-то два из них дают одинаковые остатки при делении на a, так как различных остатков существует всего a. Пусть, например, числа 2^k-1 и 2^n-1 дают одинаковые остатки при делении на a и $k<n$. Тогда число $(2^n-1)-(2^k-1)=(2^{n-k}-1)\,2^k$ делится на a, и так как a является нечетным числом, то число $2^{n-k}-1$ делится на a. 3. Обозначим данные числа через a_1, a_2, a_3, a_4, a_5. Тогда $(a_1+a_2+a_5-a_3-a_4)(a_1+a_3+a_4-a_2-a_5)=a_1^2-(a_2+a_5-a_3-a_4)^2\leqslant a_1^2$.

Аналогичным образом показывается, что $(a_2 + a_3 + a_1 - a_4 - a_5)(a_2 + a_4 + a_5 - a_3 - a_1) \leqslant a_2^2$; $(a_3 + a_4 + a_2 - a_5 - a_1)$ $(a_3 + a_5 + a_1 - a_4 - a_2) \leqslant a_3^2$; $(a_4 + a_5 + a_3 - a_1 - a_2)(a_4 + a_1 + a_2 - a_5 - a_3) \leqslant a_4^2$; $(a_5 + a_1 + a_4 - a_2 - a_3)(a_5 + a_2 + a_3 - a_1 - a_4) \leqslant a_5^2$. Для доказательства утверждения задачи перемножим эти неравенства почленно. 4. Применим тождество $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}(\alpha + 60°) + \operatorname{tg}(\alpha + 120°) = 3\operatorname{tg}3\alpha$ 15 раз к $\alpha = 1° + 4°k$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, 14)$. Сложим эти 15 равенств. Применив это тождество, снова приводим данную в задаче сумму к следующему виду: $9(\operatorname{tg}9° + \operatorname{tg}81° - \operatorname{tg}63° - \operatorname{tg}27°) + 9$. Теперь осталось доказать, что выражение, стоящее в круглых скобках, равно 4. 5. Для любого многочлена $p(x)$ с целыми коэффициентами и для любых двух целых чисел a и b разность $p(b) - p(a)$ делится на $b - a$, потому что для всякого натурального числа m разность $b^m - a^m$ делится на $b - a$: $b^m - a^m = (b - a)(b^{m-1} + b^{m-2}a + \ldots + ba^{m-2} + a^{m-1})$. Если есть такие целые числа c_1, c_2, c_3, a, что $p(c_1) = p(c_2) = p(c_3) = 1$ и $p(a) = 0$, то $p(c_1) - p(a) = p(c_2) - p(a) = p(c) - p(a) = 1$. Поэтому числа $c_1 - a$, $c_2 - a$, $c_3 - a$ могут быть равны только 1 или -1. Следовательно, все эти числа не могут быть различными. 6. Меняем знаки у строк или столбцов, в которых сумма чисел отрицательна. При каждом таком изменении знаков общая сумма всех чисел таблицы увеличивается, поэтому одна и та же таблица не может получиться два раза. Но всего разных таблиц, которые получаются в результате изменения знаков в строках и столбцах из данной таблицы, конечное число. Следовательно, через несколько шагов получается таблица, с которой уже невозможно проделать указанную операцию, т. е. у которой сумма чисел в каждой строке и в каждом столбце неотрицательна. 7. Для $n = 1$ утверждение задачи очевидно. Допустим, что для n машин это утверждение также верно. Тогда среди $n + 1$ машин есть такая машина A, которая может, используя только свой бензин, доехать до следующей машины B. Выльем из машины B бензин в A и уведем машину B с дороги. Среди оставшихся n машин, по предположению индукции, есть такая машина, которая способна объехать всю дорогу, забирая по пути бензин у остальных машин. Очевидно, что эта же машина может это сделать и в начальной ситуации, т. е. когда на дороге $n + 1$ автомашина, потому что на участке дороги от A до B у нее хватит бензина (из машины A), а на остальных участках дороги у нее такое же количество бензина, как и в случае n автомашин. 8. Справедливость утверждения задачи вытекает из теоремы: «Для любого $x > 1$ между x и $2x$ содержится хотя бы одно простое число». Возьмем простое число p такое, что $0{,}5\,n < p < n$. Число p войдет только в одну группу чисел, а «уравновесить» его нельзя, потому что $2p > n$. Теперь применим теорему об единственности разложения чисел на простые множители. 9. Пусть в десятичной записи числа K есть k цифр. Тогда в роли числа T можно взять любое число 999...99, которое записывается n девятками $(n \geqslant k)$. В таком случае суммы цифр чисел T и KT равны $9n$ (в числе $KT = K(10^n - 1)$ цифры, отстоящие друг от друга на n разрядов, дают в сумме 9). 10. Это можно сделать только в том случае, если $n > 3$ и одно из чисел n или $n + 1$ кратно трем. Необходимость этого условия следует из того, что общий вес гирь $1 + 2 + \ldots + n = 0{,}5n(n + 1)$ должен быть кратным трем. Достаточность этого условия доказывается следующим образом: во-первых, разбиение можно выполнить при $n = 5, 6, 8, 9$: $5 = 1 + 4 = 2 + 3 = 5 + 0$; $7 = 1 + 6 = 3 + 4$; $12 = 4 + 8 = 5 + 7 = 1 + 2 + 3 + 6$; $15 = 6 + 9 = 7 + 8 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5$. Во-вторых, все остальные нужные нам значения n можно получить из этих четырех значений n прибавлением некоторого числа шестерок. Кроме того, всякую последовательность из шести целых чисел вида $a + 1, a + 2, \ldots, a + 6$ можно разбить на три пары чисел, имеющих равные суммы: $(a + 1) + (a + 6) = (a + 2) + (a + 5) = (a + 3) + (a + 4)$.

Гл. 5

§ 2

1. 1) Путь движения точки E — ломаная $P_0P_1P_2P_3P_4P_5P_6P_7P_0$, где $P_0(4, 4)$, $P_1(2, 4)$, $P_2(4, 0)$, $P_3(8, 2)$, $P_4(8, 8)$, $P_5(2, 8)$, $P_6(0, 4)$, $P_7(4, 2)$. 2. $|DM| = |MK|$. 4. 1) См. задачу 3.

Гл. 6

§ 1

1. Перенести (MK), (PH) и (BD) так, чтобы (PH) прошла через B, а B, двигаясь параллельно (CD), пришла на новое положение (MK). 3. Перенести $[DE]$ в $[AE_1]$. Тогда внд $\triangle E_1EC$ будет известен. Поэтому станет известным геометрическое место точки E_1. 5. $\angle BCD$ известен, потому что $\angle BCA \cong \angle BDA$. 12. Отразить окружность O так, чтобы она проходила через M и касательная к ней в M пересекала (AB) под данным углом. Тогда искомый центр будет являться пересечением оси симметрии и известной прямой. 14. Если отражение B относительно (AC) есть B_1, то легко построить $\triangle B_1DC$. 16. Отложить $[AC]$ на $[AD]$ так, чтобы отрезок $[DE]$ был конгруэнтен данной разности. Проведя $(EM) \parallel (BC)$, можно определить A. 18. На продолжении $[CA]$ отложить до D половину $[CA]$. Теперь можно построить $\triangle DBE$. 22. Повернуть одну из данных прямых около точки A на 60°. 24. Повернуть одну из данных окружностей около точки A на 60°. 26. Отношение и угол определяют вид искомой фигуры. Общий центр параллелограммов принять за центр вращения. 28. P — центр вращения. Прямые (AX) и (BY) встречаются на окружности APB и на прямой (MK). 32. Точку пересечения прямых (AB) и (CD) принять за центр гомотетии. 34. Умножить одну окружность на данное отношение. 41. Точку пересечения данных окружностей принять за центр инверсии.

§ 2

4. Построить сначала дугу, стягиваемую хордой OK, в которую вписывается данный угол A. 5. Использовать метод координат. 6. Построить сначала прямоугольный треугольник по гипотенузе $[BM]$ и катету, конгруэнтному половине отрезка $[AH]$. 7. Отрезки длиной x, y, z могут быть сторонами остроугольного треугольника, если выполняются условия: $x \leqslant y \leqslant z$, $z < x + y$, $z^2 < x^2 + y^2$. Допустим, что существует пять отрезков с длинами a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 таких, что $a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3 \leqslant a_4 \leqslant a_5$ и любые три из них могут быть сторонами остроугольного треугольника. Тогда $a_5^2 \geqslant a_4^2 + a_3^2$, $a_4^2 \geqslant a_3^2 + a_2^2$, $a_3^2 \geqslant a_2^2 + a_1^2$. Поэтому $a_5^2 \geqslant 2a_3^2 + a_2^2 \geqslant 3a_2^2 + 2a_1^2 \geqslant a_2^2 + 2a_1a_2 + a_1^2 = (a_1 + a_2)^2$, т. е. $a_1 + a_2 \leqslant a_5$. Следовательно, не существует треугольника, длины сторон которого a_1, a_2, a_5. 8. На отрезке $[KM]$, как на диаметре, построить полуокружность. Затем построить хорду $[MH]$, длина которой равна расстоянию между прямыми (AB) и (CD). 9. Восставив в середине отрезка $[BC]$ перпендикуляр к прямой (AB), мы получим в пересечении его с окружностью две искомые точки. 10. Описав на отрезках $[MK]$ и $[PH]$, как на диаметрах, окружности, найдем диагональ квадрата $ABCD$, так как она проходит через середины полуокружностей. 11. Пусть a, b, c — длины сторон $\triangle ABC$. Считаем, что $b > c$. Построим $[OP] \perp (BC)$ ($|OP| = r$). Тогда $|MC| = 0{,}5a$; $|PC| = 0{,}5(a+b-c)$, $|HC| = (a^2 + b^2 - c^2) : 2a$. Очевидно, $|EH| : |OP| = |HM| : |PM| = (|HC| - |MC|) : (|PC| - |MC|) = (2|HC| - a) : (b - c) = (a^2 + b^2 - c^2 - a^2) : a(b - c) = (b + c) : a$. Отсюда $|AE| : r = |AH| : r - |EH| : r = (a + b + c) : a - (b + c) : a = 1$. 12. Искомая точка принадлежит данной прямой и некоторой окружности. 13. Четырехугольник $AKDM$ является прямо-

угольником, точка L — его центр симметрии. Построим $[AP] \perp (KM)$. Тогда $|AL|^2 = |AK| \cdot |AM| = |KM| \cdot |AP| = 2|AL| \cdot |AP|$, $|AL| = 2|AP|$, $\overset{\wedge}{PLA} = 30°$. И так как $|AL| = |KL| = |ML|$, то острые углы треугольника AKM равны 15° и 75°. Такие же острые углы и у треугольника ABC: $\hat{C} = \overset{\wedge}{BAD} = \overset{\wedge}{AKM}$. 15. Построить четырехугольник $OABC$, у которого $|OA| = |OC| = R$, $|AB| = |BC| = r$, $|AC| = a$. Центр искомой окружности O ($|OB|$) принадлежит прямой, параллельной прямой (MK) и отстоящей от (MK) на r. 16. Рис. 168. 22. Пусть $|AB|$ — диаметр многогранника M. Спроектировать ортогонально все ребра многогранника M на прямую (AB). (Сколько точек проектируется в какую-нибудь точку C, лежащую внутри отрезка $[AB]$?) Если через C провести плоскость $P \perp (AB)$, то P пересечет многогранник M по выпуклому многоугольнику. Вершины этого многоугольника (их не меньше трех) являются точками пересечения плоскости P с ребрами многогранника M. Следовательно, в каждую внутреннюю точку $[AB]$ проектируется ортогонально не меньше трех ребер многогранника M. Отсюда следует утверждение задачи.

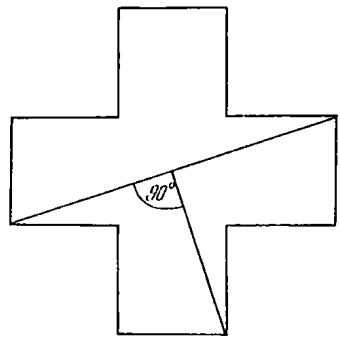


Рис. 168

§ 3

3. Да. 4. Является центром окружности, описанной около основания пирамиды. 6. Опустить из произвольной точки A_1 луча $[OA)$ перпендикуляры $[A_1H]$ и $[A_1P]$ на прямые (OB) и (OC). Отрезки $[HA_0]$ и $[PA_0]$ — ортогональные проекции $[A_1H]$ и $[A_1P]$ на плоскость BOC. Затем исследовать треугольники OA_1H, OA_1P, OHA_0, OPA_0. 7. Доказать, что $(BC) \perp$ пл. MM_1M_2. 8. Образует полуплоскость, которая делит данный двугранный угол пополам. 9. Строим $(DH) \perp (AB)$. Прямая $(HC) \perp (AB)$. Строим $(DM) \perp (BC)$. Очевидно, $(AM) \perp (BC)$. Пусть $O = (AM) \cap (HC)$. Прямая $(AB) \perp$ пл. HDC, поэтому $(AB) \perp (DO)$. Прямая $(BC) \perp$ пл. AMD, поэтому $(BC) \perp (DO)$. Итак, $(DO) \perp$ пл. ABC. 10. Нет, ибо противоположные грани куба параллельны и секущая плоскость пересекает их по параллельным отрезкам. 11. Точка пересечения данных плоскостей — центр шара, описанного около пирамиды. 12. Пусть M — середина $[BC]$. Очевидно, $(O_1M) \perp (BC)$, $(O_2M) \perp (BC)$. Поэтому $(BC) \perp$ пл. O_2MO_1. По условию задачи $(OO_1) \perp$ пл. ABC. Поэтому $(O_1O) \perp (BC)$. Аналогично $(OO_2) \perp (BC)$. Итак, все четыре точки O, O_1, O_2, M лежат в одной плоскости. Таким же образом показывается, что и перпендикуляры к плоскостям ACD и ABD, проходящие через O_3 и O_4, проходят через O. Точка O для данной пирамиды является центром описанного шара. 14. Выразить длины $|AM|$, $|BM|$, $|MC|$ через длину ребра тетраэдра. Применить теорему косинусов к треугольникам AMB, BMC, AMC (для вычисления величины углов при вершине M). 18. Да. 19. Да. Если такая пирамида есть, то $R + r = h$ (h — высота пирамиды, R и r — радиусы описанного и вписанного шара). Выразить R и r через h и через двугранный угол при основании пирамиды. Показать, что этот угол острый. 20. 1) Пусть $[C_1D_1]$ — новое положение $[CD]$. Причем $[CC_1] \parallel [AB]$. В этом случае площади треугольников ABC и ABC_1 равны и расстояния от D и D_1 до пл. ABC (ABC_1) одинаковы. Поэтому объемы пирамиды $DABC$ и D_1ABC равны. 2) Пусть $[C_2D_2]$ — новое положение $[CD]$ и $|C_2D_2| = |CD|$, но $[CC_2]$ и $[AB]$ непараллельны. Пирамиды ABD_2C_2 и ABC_1D_1 равновелики (см. случай 1). Поэтому ABC_2D_2 и $ABCD$ равновелики. 21. 1) Доказать утверждение задачи для случая, когда $(AB) \perp (CD)$. Применить теорему о биссектрисе внутреннего угла треугольника. 2) (AB) и (CD) не

ортогональны. Рассмотреть пирамиду D_1ABC такую, что $(DD_1) \parallel (AB)$ и $(CD_1) \perp (AB)$. 22. 1 : 1. 27. За изображение этой трапеции можно принять всякую трапецию, диагонали которой точкой пересечения делятся в отношении 1 : 2. 28. Использовать равенство $|AC| : |CB| = |AK| : |KB|$, верное для любого треугольника. 29. Прямая $p \parallel (BD)$. 30. Для прямоугольного треугольника верно равенство $|AC|^2 : |CB|^2 = |AH| : |HB|$. Поэтому (CH) делит $[AB]$ в отношении 1 : 9. 31. См. задачи 29 и 30. 32. H — середина $[AC]$. Строим высоту $[HM]$ прямоугольного треугольника BHC (см. задачу 30). Строим $[AK] \parallel (HM)$. 40. $X = (MK) \cap (AB)$. 41. Пусть $K_0 = (CD) \cap$ пл. KAA_1. Очевидно, $(KK_0) \parallel (DD_1)$; $X = (AK_0) \cap (MK)$. 49. Так как $(BM) \parallel$ пл KPX, то в пл. KPX есть прямая a, проходящая через X и параллельная (BM). Очевидно, $a = (XE)$, где $E = (BD) \cap (KP)$. Строим $E = (BD) \cap (PK)$. Через E проводим $a \parallel (BM)$. Получаем $X = a \cap (MD)$. 51. Прямые (AB_1) и (CK) скрещиваются. Поэтому отрезок $[XY]$ принадлежит плоскости Π, проходящей через (AB_1) и параллельной (KC). Очевидно, Π совпадает с плоскостью AB_1M, где M — середина $[BC]$; $[B_1M] \parallel (KC)$ и $|B_1M| = |KC|$. Поэтому X — середина $[AB_1]$, Y — середина $[AM]$. 55. Треугольник AMB — равнобедренный. Поэтому $(KM) \perp (AB)$ (K — середина $[AB]$). Отрезок $[EX] \parallel (KM)$. 58. $(AB) \perp (CD)$. Поэтому задача сводится к построению высоты $[BX]$ треугольника BCD. 59. Прямая $p \parallel (BD)$. 60. $[MH]$ параллелен высоте $[AO]$ тетраэдра на грань DBC. 61. Пирамида $D_1A_1C_1D$ — правильная. Поэтому H — точка пересечения медиан треугольника A_1C_1D. Доказать, что (D_1H) проходит через вершину B куба. 62. Угол B_1OB, где $O = (DB) \cap (AC)$. 63. Пл. $CDM \perp$ пл. DBK. Угол BKC — нскомый. 64. Применить теорему о трех перпендикулярах. Отрезок $[MK]$ (K — середина $[DD_1]$) перпендикулярен пл. DD_1C, которой принадлежит прямая (DP). Построить $(D_1E) \perp (DP)$, $(KH) \parallel (D_1E)$, $(KH) \perp (DP)$. Отрезок $[MH] \perp (DP)$ (теорема о трех перпендикулярах). 65. $(AA_1) \perp$ пл. ABC. Строим $(AH) \perp (MK)$; $X\hat{H}A = 60^\circ$ (теорема о трех перпендикулярах). Поэтому $|AX| = |AH| \sqrt{3}$. Отрезок $[AH]$ находим из треугольника MAK. 66. Пусть E — середина $[AB]$, P — середина $[CD]$. Очевидно, пл. $MPE \perp$ пл. DCM. Поэтому $\Pi \supset (EH) \perp (MP)$. Так как $(AB) \parallel (CD)$, то $(XY) \parallel (CD)$ и $[XY] \supset H$. Задача свелась к построению высоты $[EH]$ треугольника EMP, где $|EM| = |MP|$. 67. Построить $[CQ] \perp$ пл. DBO; $[AX] \parallel [CQ]$. 68. Доказать, что пл. $MDB \perp$ пл. ACA_1. Отрезок $[EX] \perp (ME)$ и E принадлежит отрезку $[CC_1]$ или $[A_1C_1]$. Вместо $[EX]$ сначала построить $[AY] \perp (ME)$. Строим $(EX) \parallel (AY)$.

§ 7

1. Использовать формулы (А) и (Г). 2. Использовать формулу (Г). 4. Применить последовательно формулы (Б), (В), (Е), (А). 5. Применить последовательно формулы (А), (Б), (Г). 6. Применить последовательно формулы (Б), (В), (А). 7. Применить формулу (Г) к трехгранному углу $ABCD$. 8. $M = Q \cdot \cos x$, где x — двугранный угол при стороне основания. Угол x выражается через β по формуле (Г). 10. Пусть K — середина $[AM]$. Строим $(KO) \perp (AM)$, где O принадлежит высоте $[MH]$ пирамиды. Очевидно, $R = |OM| = 0{,}5 : \cos x$, где $x = A\hat{M}H$. 12. $x = \dfrac{M}{3 \cos y}$. Применить формулу (А) к прямоугольному трехгранному углу $AOBD$ ($[DO] \perp$ пл. ABC) для определения $D\hat{A}O$ и (Г) для определения двугранного угла y при основании пирамиды. 13. Ввести в рассмотрение векторы $\vec{AB}$, $\vec{BC}$, $\vec{AC}$, $\vec{AD}$, $\vec{BD}$, $\vec{CD}$. 14. Ввести в рассмотрение векторы $\vec{BX}$, $\vec{BC}$, $\vec{CY}$, $\vec{XY}$, $\vec{D_1A}$, $\vec{D_1B_1}$, $\vec{D_1C_1}$, $\vec{BD_1}$, $\vec{CB_1}$, $\vec{AB}$, $\vec{AA_1}$, $\vec{A_1D_1}$, $\vec{BB_1}$, где $[XY]$ — общий перпендикуляр к прямым (D_1B) и (B_1C). Очевидно, $\vec{XY} = \vec{BX} + \vec{BC} + \vec{CY}$. По условию задачи $\vec{XY} \cdot \vec{BD_1} = 0$ и $\vec{XY} \cdot \vec{B_1C} = 0$.

26. Обозначим $M = \Pi \cap (DC)$; P — середина $[AB]$. Строим $(MK) \perp$ пл. ABD и $(MH) \perp$ пл. ABC. Так как треугольники ABD и ABC равновелики, то $|KM| : |MH| = k$, $x = \overset{\wedge}{KPM}$, $y = \overset{\wedge}{MPH}$. Следовательно, $\sin x : \sin y = |KM| : |MH| = k$. Сумма углов $x + y$ равна двугранному углу AB. Поэтому для определения x и y находим двугранный угол правильного тетраэдра $ADBC$ по формуле (В). 29. Секущая плоскость пересекает ребра $[AD]$, $[DB]$, $[BC]$ и $[CA]$ в их серединах X, Y, K, T. Сечением является параллелограмм $XYKT$ с острым углом 60°, причем $|XY| = |TK| = 1$, $|XT| = |YK| = 2$. Дополним многогранник $ABYXKT$ до треугольной призмы $AXTBY_1K_1$ ($|XY_1| = |TK_1| = |AB|$). Объем многогранника $ABYXTK$ равен разности объемов треугольной призмы $AXTBY_1K_1$ и четырехугольной пирамиды BYY_1K_1K (высота ее равна 3). Аналогичным образом определяется и объем второй части пирамиды. 31. $|XY| = 0{,}5\,(2 - \sqrt{3})\,a$. Построить сечение куба диагональной плоскостью AA_1C_1C. Эта плоскость в пересечении с названными шарами образует два круга, центр первого из которых совпадает с точкой O пересечения диагоналей $[A_1C]$ и $[AC_1]$ куба. Этот круг касается отрезков $[A_1C_1]$ и $[AC]$. Центр X второго круга принадлежит отрезку $[AC_1]$, касается отрезка $[A_1C_1]$ в некоторой точке Y и касается первого круга в точке P, лежащей на $[AC_1]$. Очевидно, первый круг касается отрезка $[A_1C_1]$ в точке M, которая является серединой $[A_1C_1]$. Радиус $|XY|$ второго круга находим из подобных треугольников C_1YX и C_1MO. 32. Построить осевое сечение данного усеченного конуса — равнобочную трапецию ABB_1A_1. В пересечении с рассматриваемыми шарами получаем два круга, которые имеют следующие свойства: первый вписан в равнобочную трапецию ABB_1A_1. Центр второго круга лежит на биссектрисе угла A_1B_1B, он касается сторон этого угла и касается первого круга в точке, лежащей на биссектрисе угла A_1B_1B. Для определения радиуса второго круга рассматриваем подобные прямоугольные треугольники, аналогичные тем, которые рассматривались в задаче 30. 33. Центр сферы совпадает с центром шара, описанного около правильного тетраэдра, вершинами которого являются центры данных шаров. 35. Обозначить: x — радиус четвертого шара, D — его центр; A, B, C — центры шаров, радиусы которых равны по 15 мм. Построить окружности (радиусы их равны 15 мм) так, чтобы каждая из них касалась двух остальных. Построить к каждой паре этих окружностей внешние касательные (не пересекающие третью окружность). Эти касательные в пересечении образуют правильный треугольник. Вписать в этот треугольник окружность. Радиус x этой окружности равен радиусу четвертого шара Ш. Вычислить высоту H правильной треугольной пирамиды $DABC$ ($|AB| = |BC| = |AC| = 30$ мм; $|AD| = |BD| = |CD| = (15 + x)$ мм). Очевидно, $h = 15 + H + x$. 39. Основаниями цилиндра являются круги, вписанные в правильные треугольники A_1C_1D и B_1AC. Обозначить $P = (D_1B) \cap$ пл. A_1C_1D, $K = (D_1B) \cap (AB_1C)$. Теперь доказать, что высота $|PK|$ цилиндра равна третьей части $|D_1B|$. 42. Пусть (OY) — прямая, по которой пересекаются плоскости, касающиеся конуса по образующим OA и OB. $\overset{\wedge}{HOA} = \overset{\wedge}{HOB} = \alpha$, $\overset{\wedge}{AOY} = \overset{\wedge}{BOY}$. Поэтому плоскость HOY делит прямой двугранный угол при ребре OY пополам. Пусть $[OM) = \angle HOY \cap \cap \angle AOB$. Очевидно, $(AOM, \overset{\wedge}{MOY}) = 90°$ и $\overset{\wedge}{AOM} = 0{,}5x$. У прямоугольного трехгранного угла $OHAY$ известен $\overset{\wedge}{HOA} = \alpha$ и $(HOY, \overset{\wedge}{AOY}) = 45°$. Поэтому можно найти $(HOA, \overset{\wedge}{YHO})$ по одной из формул с. 186. После этого рассмотреть прямоугольный трехгранный угол $OHMA$. 43. Обозначить A и B — центры основания конусов, OC и OD — образующие, по которым они касаются с одной из рассматриваемых плоскостей. Плоскости OAB и OCD образуют двугранный угол, равный половине искомого угла x. Пусть $(OM) =$ пл. $AOB \cap$

$\cap$ пл. COD. Трехгранный угол $ODBM$ — прямоугольный, причем $\overset{\wedge}{MOB}=90^\circ-\alpha$, $\overset{\wedge}{BOD}=\alpha$. Двугранный угол при ребре OM трехгранного угла $ODBM$ равен $0{,}5x$. Для определения $0{,}5x$ из трехгранного угла $ODBM$ применить одну из формул с. 186. 47. Обозначить сторону тетраэдра — x, основание высоты — H. Построить сечение шара и тетраэдра плоскостью, проходящей через середину M стороны $[AB]$ и высоту $[DH]$; $O \in [DH]$. Итак, $|CO|=a$, $DO=b$; $|DC|$ найдем из треугольника DOC. Но для этого нужно определить $\overset{\wedge}{HDO}$, равный $\overset{\wedge}{ODC}$. Это можно сделать так. Выразим через x $|HC|$. Очевидно, $|HC|=$ $=x\sqrt{3}:3$ sin $\overset{\wedge}{HDC}=|HC|:|DC|=\sqrt{3}:3$. 49. Пусть $(OK)\perp(AB)$, $(OP)\perp$ $\perp(BC)$, $(OH)\perp(BD)$; $\triangle OKB\cong OHB\cong\triangle OPB$. Поэтому высота $[BT]$ пирамиды образует конгруэнтные углы с ребрами $[BA]$, $[BD]$, $[BC]$. Из прямоугольных треугольников ATB, CTD и DTB следует, что $|AB|=|DB|=|BC|$. Пусть $[OX]\perp(AD)$, $(OY)\perp(CD)$, $[OM]\perp(AC)$. На основании теоремы о трех перпендикулярах $[TY]\perp(DC)$, $[TM]\perp(AC)$, $[TX]\perp(AD)$. На основании теорем о наклонных и их проекциях $|XO|=|OM|=|OY|$. Теперь ясно, что $|AD|=|DC|=|AC|$. 52. 3) => 4); 4) => 3); 5) => 1), 2), 3), 4), 6), 7), 11), 12), 13); 6) => 1), 2), 3), 4), 7), 11), 12), 13); 7) => 1); 8) => 1), 11); 13) => 1); 10) => 1); 12 => 3), 4); 13) => 1), 2), 3), 4), 6), 7), 11), 12). 53. 1) => 12); 3) => 4), 5), 7), 8), 11), 16); 4) => 7), 8); 5) => 4), 7), 8); 7) => 4), 8); 8) => 4), 7); 9) => 1), 4), 7), 8), 12), 13), 17), 18); 10) => 1), 2); 11) => 4), 7), 8); 12) => 1); 13 => 4), 7), 8); 14) => 1), 2), 3), 4), 5), 7), 8), 9), 10), 11), 12), 13), 15), 16), 17), 18); 15) => 1), 4), 5), 7), 8), 9), 12), 13), 17), 18); 16) => 4), 5), 7), 8); 17) => 1), 4), 7), 9), 12), 13), 18); 18) => 1), 4), 7), 8), 9), 12), 13), 17).

Упражнения к гл. 6

1. Если бы такая прямая существовала, то по обе стороны от нее лежало бы одно и то же число вершин многоугольника. 2. Рассмотрим все треугольники с вершинами в данных точках. Выберем один из тех, в которые попадает наибольшее число точек. Обозначим его ABC. Проведем прямые (AB), (BC) и (CA). Они разбивают плоскость на области трех типов: треугольник, углы, открытые области. Исследовать каждую из этих областей. 3. На основании задачи 2 среди пяти точек плоскости, никакие три из которых не лежат на одной прямой, есть четыре, образующие выпуклый четырехугольник. Рассмотрим все возможные группы по 5 точек, выбранные из данных n точек. Таких групп будет C_n^5. В каждой группе найдется по крайней мере одна четверка точек, образующих выпуклый четырехугольник. Но каждый такой четырехугольник мог быть сосчитан $n-4$ раза, потому что при фиксированных четырех точках — вершинах этого четырехугольника — в качестве пятой точки можно взять любую из оставшихся $n-4$ точек. Поэтому всего выпуклых четырехугольников будет не менее $\dfrac{C_n^5}{n-4}$. Теперь докажите, что $C_n^5:(n-4)\geqslant C_{n-3}^2$. **4.** Пусть P_j — любая точка. Так как пять отрезков прямых имеют общую исходную точку P_j, то по крайней мере три из них одного цвета, например $[P_1P_2]$, $[P_1P_3]$, $[P_1P_4]$. Пусть они будут белыми. Тогда, если хоть один из отрезков $[P_2P_3]$, $[P_3P_4]$, $[P_4P_2]$ белый, например $[P_2P_3]$, то треугольник $P_1P_2P_3$ белый. Если все эти отрезки черные, то треугольник $P_2P_3P_4$ черный. 5. Через две произвольные точки провести прямую. Через все остальные точки провести прямые, параллельные

первой прямой. 6. Рассмотреть возможные случаи: 1) данные точки лежат в вершинах выпуклого шестиугольника; 2) пять, четыре или три из данных точек лежат в вершинах выпуклого многоугольника, а остальные точки лежат внутри этого многоугольника. 7. Нельзя, потому что каждая костяшка покрывает одно белое и одно черное поле, а из доски вырезано два черных поля. 8. Пусть A — общая точка кругов. Соединить A с центрами кругов и рассмотреть наименьший из образовавшихся углов. Доказать, что отрезок, соединяющий соответствующие центры O_1 и O_2, лежит целиком в одном из кругов. 9. Десять способов. 10. Каждая фигура закрывает либо три белых клетки, либо три черных, а всего фигур 25. 11. Куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ можно разбить на пять тэтраэдров: B_1D_1AC, A_1AB_1D, C_1CB_1D, BB_1AC, DD_1AC. Докажем, что на меньшее число тетраэдров куб разбить нельзя. Пусть куб с ребром 1 разбит на некоторое число тетраэдров. Есть не менее двух из них, основания которых лежат на грани $ABCD$ (грань куба — квадрат и поэтому не может быть гранью одного тетраэдра). Есть не менее двух тетраэдров, основания которых лежат на грани $A_1B_1C_1D_1$. Эти тетраэдры отличны от первых двух, ибо у тетраэдра нет параллельных граней. Очевидно, общий объем этих четырех тетраэдров не больше двух третей объема куба. Поэтому есть по крайней мере еще один тетраэдр. 12. Всего прямых $C_5^2 = 10$. Через каждую точку, например C, проходит четыре прямых. Поэтому из каждой точки выходят шесть перпендикуляров. Рассмотрим две точки B и C. Перпендикуляры, опущенные из B на прямые, проходящие через C, пересекают все перпендикуляры, опущенные из C. Из C выходят три прямых, не проходящих через B. Следовательно, из B на них можно опустить три перпендикуляра. Они пересекаются с перпендикулярами из C в $3 \cdot 6 = 18$ точках. Всякий другой перпендикуляр из B к остальным трем прямым, не проходящим через B, пересекает пять перпендикуляров из C, ибо с одним он не пересекается, потому что опущен с ним на одну сторону. Получается еще 15 точек. Итак, перпендикуляры, проведенные из двух точек, пересекаются в $18 + 15 = 33$ точках. Из пяти точек можно составить 10 пар. Поэтому точек пересечения не более чем $33 \cdot 10 = 330$. Но часть из них совпадает. Так, любые три из данных пяти точек образуют треугольник, высоты которого пересекаются в одной точке. Мы эту точку учли три раза. Всего таких треугольников $C_5^3 = 10$. Следовательно, десять точек было учтено по три раза. Итак, всего точек пересечения не более чем $330 - 30 + 10 = 310$. 16. 1. *а*) Обозначить данные точки A, B, C, D, E и предположить, что из точки A выходят три красных отрезка. Пусть, например, отрезки $[AB]$, $[AC]$, $[AD]$. Тогда, по условию задачи, отрезки $[BC]$, $[DB]$, $[CD]$ должны быть синими. Треугольник DBC получился синим, а это противоречит условию задачи; б) по предыдущему из точки A исходят два отрезка одного цвета, например, красного, $[AB]$ и $[AC]$. Тогда $[AD]$ и $[AE]$ — синие отрезки. Из условия задачи вытекает, что $[BC]$ — синий, а $[DE]$ — красный. Из точки D исходит еще один красный отрезок — либо $[CD]$, либо $[DB]$. В обоих случаях цвета остальных отрезков определяются однозначно. 2. Искомая линия: $ABEDCA$, $ADBCEA$, $ABDECA$, $ADCBEA$. 17. Рассмотрим произвольную продольную или поперечную прямую. Она делит доску на две области, в каждой из которых имеется четное число клеток. Из них четное число (может быть, нуль) покрыто костяшками, не пересекающими границу областей. Значит, границу может пересекать только четное число костяшек; всего таких прямых есть 102, и для того чтобы каждую из них пересечь костяшками, потребовалось бы не менее 204 костяшек. Но у нас только 200 шт. 18. Назовем поля, расположенные на верхней и нижней горизонталях, крайними, а остальные — средними. На крайнее поле можно попасть конем только со среднего. Если конь обошел все поля с соблюдением условий задачи, то $2n$ ходов были сделаны со средних полей на крайние. Оставшиеся $2n$ ходов должны быть сделаны с крайних полей на средние. Но с каждым ходом изменяется также цвет поля, на котором стоит конь. Получается, что все поля крайних

горизонталей окрашены в один цвет, а средние — в другой. Получили противоречие. 19. $n(n-2)(n-4):8$, если n — четное; $n(n-1)(n-3):8$, если n — нечетное число. 20. При каждом разрезании число кусков бумаги увеличивается на один, поэтому после k разрезов будет $(k+1)$ кусок. При каждом разрезании общее число вершин увеличивается на два (если разрез проходит через две вершины), или три (если разрез проходит через вершину и сторону), или на четыре (если разрез проходит через две стороны). Сначала было четыре вершины. Поэтому после k разрезов во всех кусках будет вместе не больше $4k+4$ вершин. Допустим, что после K разрезов получили сто двадцатиугольников. Общее число кусков будет $K+1$. Поэтому, кроме этих двадцатиугольников, будем иметь еще $K+1-100$ кусков. Каждый из этих кусков имеет не меньше трех вершин. Следовательно, общее число вершин во всех кусках не меньшее, чем $100\cdot 20+(K-99)\cdot 3$. Но это число не больше, чем $4K+4$. Поэтому $4K+4\geqslant 100\cdot 20+(K-99)\cdot 3$. Отсюда $K\geqslant 1699$. Таким образом, нельзя получить 100 двадцатиугольников, если выполнить меньше 1699 разрезов. Получить 100 двадцатиугольников, сделав 1699 разрезов, можно следующим образом: разрезаем квадрат при помощи 99 разрезов на сто прямоугольников. Каждый прямоугольник за 16 разрезов превращается в двадцатиугольник. Для этого отрезаем последовательно от прямоугольников треугольники. На это затратим 1600 разрезов.

24. Рис. 169. 30. Рис. 115, б. 32. Рис. 119, б. 34. Рис. 170. 35. Рис. 171. 36. Рис. 172. 37. Рис. 173. 38. Рис. 174. 40. Рис. 175. 42. Рис. 176. 44. Рис. 177. 45. Рис. 178.

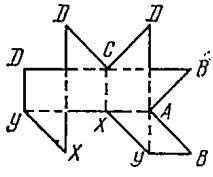


Рис. 169

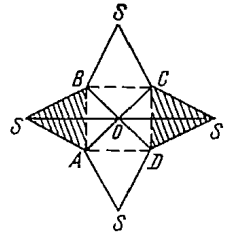


Рис. 170

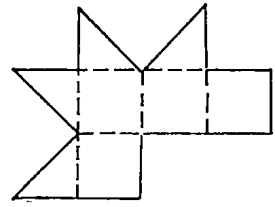
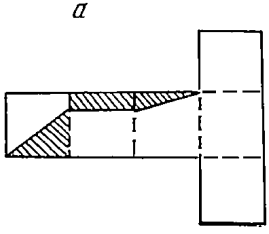
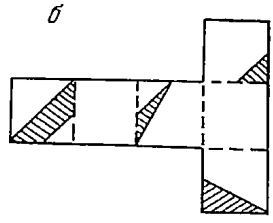


Рис. 171





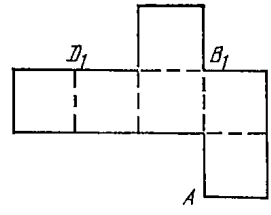


Рис. 172

Рис. 173

46. а) Для данных точек A и B точка C, лежащая вне прямой (AB) и вне полосы, образованной перпендикулярами к прямой (AB) в точках A и B, образует с точками A и B невырожденный тупоугольный треугольник. Для каждой пары точек из заданного конечного множества построим полосу и прямую, аналогичные паре точек A и B. Конечное число полос конечной ширины и прямых не покроют всей плоскости, поэтому существует точка, образующая с каждой парой точек

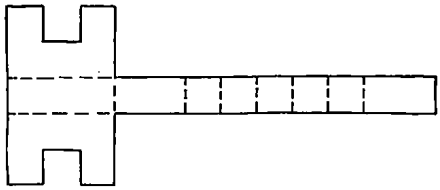


Рис. 174

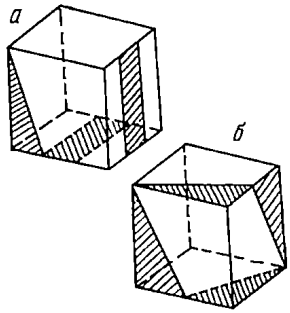


Рис. 175

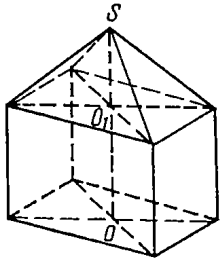


Рис. 176

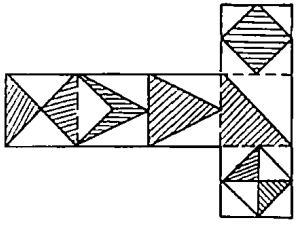


Рис. 177

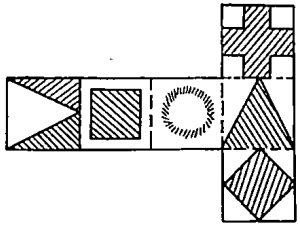


Рис. 178

из заданного множества тупоугольный треугольник. б) Вообще говоря, несправедливо. Приведем пример. Рассмотрим множество, состоящее из точек полуокружности без одного конца диаметра. Такое множество удовлетворяет всем условиям задачи. Докажем, что к нему нельзя прибавить уже ни одной точки. В самом деле, если точка лежит внутри полуокружности на ее диаметре, то всегда можно найти такую точку C на полуокружности, что треугольник ACX будет остроугольным. То же самое имеет место для всех точек, лежащих вне полуокружности или внутри, но вне ее диаметра. Если же точка выбирается на диаметре вне полуокружности, то имеет место вырожденный случай.

47. Можно. Докажем даже более общее утверждение: если правильно закрашены все клетки квадрата $n \times n$, кроме некоторых клеток одной строки или одного столбца, то квадрат можно правильно докрасить. Пусть, например, недокрашены некоторые клетки первой строки. Покрасим каждую такую клетку в тот цвет, который еще не встречается в ее столбце. Следует доказать, что в первой строке при

этом не может оказаться двух клеток одинакового, например голубого, цвета. Для этого изучим прямоугольник $(n-1)\times n$, который получается из квадрата вычеркиванием первой строки. Так как раскраска была правильной, то в каждой из $n-1$ строк прямоугольника голубой цвет попадался один раз. Поэтому всего голубых клеток в нем $n-1$, а во всяком из n столбцов прямоугольника голубая клетка встречалась не более одного раза. Поэтому голубая клетка не встречалась лишь в одном из столбцов прямоугольника. Таким образом, только в единственной клетке первой строки квадрата может появиться этот цвет.

48. Допустим, что для некоторого равностороннего выпуклого пятиугольника $ABCDE$ со стороной, равной единице, утверждение задачи неверно. Пусть, для определенности, диагональ AD наибольшая и точки A и D принадлежат горизонтальной прямой (точка D расположена правее точки A), точки B и C расположены в верхней полуплоскости относительно прямой (AD), причем точка C не ближе к прямой (AD), чем точка B. Очевидно, что

$$1<|AD|<|AE|+|ED|=2. \qquad (1)$$

В треугольниках ABD и ACD сторона AD наибольшая. Поэтому углы ABD и ACD, а тем более углы ABC и BCD все больше 60°. Следовательно, правильные треугольники, построенные на отрезках $[AB]$, $[BC]$ и $[CД]$, будут пересекаться отрезком $[AD]$, так как каждый из них (на основании сделанного допущения) пересекается границей пятиугольника, а отрезками $[AB]$, $[BC]$ и $[CD]$ эти треугольники пересекаться не могут. Итак, углы BAD и CDA меньше 60°. Отметим на отрезке $[AD]$ точки B_1, C_1 и на его продолжении точку C_3, для которых $|AB_1|=|C_1D|=|B_1C_3|=1$, и построим в верхней полуплоскости правильные треугольники AB_1B_2, C_1DC_2, $B_1C_3C_4$. Точка B принадлежит дуге B_1B_2 окружности с центром A, точка C — дуге C_1C_2 окружности с центром D. Но $|BC|=1$ и точка C расположена не ниже точки B (но и не выше, чем на расстоянии $0{,}5\sqrt{3}$ от прямой (AD)). Поэтому точка C должна быть правее дуги C_3C_4 окружности с центром в точке B_1. Но из соотношения (1) получаем, что треугольник C_1DC_2 располагается левее треугольника $B_1C_3C_4$. Поэтому дуга C_1C_2 расположена левее дуги C_3C_4. Получили противоречие, которое и подтверждает справедливость утверждения задачи.

49. Допустим, что такой многогранник существует. Сосчитаем двумя различными способами, чему равно среднее арифметическое величин плоских углов его граней. Сгруппируем сначала углы по граням. У каждой грани не менее четырех углов. Поэтому среднее арифметическое ее углов не меньше 90°. Отсюда ясно, что и среднее арифметическое всех углов не меньше 90°. Сгруппируем их теперь по вершинам. Так как к каждой вершине примыкает хотя бы четыре угла, а сумма всех углов при вершине меньше 360°, то среднее арифметическое углов при вершине меньше 90° (здесь мы пользуемся выпуклостью многогранника). Но тогда и среднее арифметическое всех углов меньше 90°. Полученное противоречие и доказывает, что таких выпуклых многогранников нет.

50. Проводим через точку K прямую l, параллельную прямой (EF). Строим середину отрезка $[EF]$ — точку M. Очевидно, прямая (OM) делит основания трапеции пополам. Находим точку N пересечения прямой l и прямой (OM). Строим параллелограмм с вершинами E, N и F, для которого отрезок (EF) является диагональю. Обозначим его четвертую вершину через P. Проводим через точку P прямую l', параллельную прямой l. Проводим через точку O прямые, параллельные сторонам параллелограмма $ENFP$. Точки, в которых эти прямые пересекают прямые l и l', являются вершинами трапеции. Проведем исследование выполненного построения. Если точка O принадлежит отрезку $[EF]$, то задача решений не имеет. Если точка O является серединой отрезка $[EF]$, то прямую (OM) можно построить почти произвольно. (Подойдет всякая прямая, пересекающая отрезок $[EF]$ в точке O; в этом случае трапеции превращаются в параллелограммы.) Если точка O не принадлежит отрезку $[EF]$, то задача имеет единственное решение при условии, что отрезок $[OM]$ короче отрезка $[MN]$.

51. Докажем, что такое множество может состоять только из трех точек.

Обозначим это множество буквой M. Пусть A и B — точки множества M, расстояние между которыми наибольшее. По условию задачи множеству M принадлежит такая точка C, что треугольник ABC правильный: $|AB|=|BC|=|AC|=d$. Пусть P — еще одна точка, принадлежащая множеству M. Расстояние между точками A и P не больше d. Поэтому точка P должна принадлежать внутренней части круга радиуса d с центром в точке A. С другой стороны, точка P должна принадлежать и внутренней части кругов радиуса d с центрами в точках B и C. Следовательно, множество M принадлежит общей части этих трех кругов. (Общей частью трех кругов является криволинейный треугольник, который мы обозначим буквой T.) Вместе с точками P и A множеству M должна принадлежать одна из двух точек Q и R, которые являются вершинами равносторонних треугольников APQ и APR, т. е. точек, которые получаются из точки P поворотом на 60° около точки A. Для того чтобы точка Q лежала внутри криволинейного треугольника T, нужно, чтобы точка P принадлежала лепестку AB. (Лепестком AB называется фигура, которая является пересечением криволинейного треугольника T и криволинейного треугольника, симметричного криволинейному треугольнику T относительно прямой AB.) В самом деле, если повернуть криволинейный треугольник T около точки A на 60° против хода часовой стрелки, то точки лепестка AB и только они не выйдут за пределы треугольника T. Точно так же, для того чтобы точка R находилась внутри треугольника T, нужно, чтобы точка P принадлежала лепестку AC. Таким образом, доказано, что всякая точка P множества M должна принадлежать фигуре T_A, которая является объединением лепестков AB и AC. Аналогичным образом можно показать, что множество M принадлежит множеству T_B и T_C. Но общая часть трех множеств T_A, T_B и T_C состоит только из точек A, B и C. Итак, никакая другая точка P не принадлежит множеству M.

52. Допустим, что можно выложить квадрат 6×6 плитками размером 1×2 без единого прямого «шва». Тогда каждая из десяти прямых, разрезающих этот квадрат на клетки 1×1, должна пересекать по крайней мере одну плитку размером 1×2. Покажем, что каждая такая прямая пересекает четное число плиток. В самом деле, она отрезает от квадрата 6×6 прямоугольник $6\times k$, который состоит из четного числа клеток 1×1. Этот прямоугольник содержит некоторое число целых плиток размером 1×2 и еще некоторое четное число клеток 1×1, которые являются половинками плиток, пересеченных прямой. Но если всякая прямая пересекает не менее двух плиток, то общее число плиток должно быть не меньше $2\cdot10=20$, а их всего 18. Итак, доказано, что квадрат размером 6×6 разрезать нужным образом на плитки нельзя.

53. Назовем квадраты допустимыми, если они закрашены не больше, чем на 0,8 и не меньше, чем на 0,2. Пусть n настолько большое число, что найдется квадрат из линий сетки со стороной 2^n, которая содержит все закрашенные клетки, причем их площадь составляет меньше 0,2 площади квадрата. Разделим этот квадрат на четыре равных. Всякий квадрат разбиения будет закрашен меньше, чем на 0,8. Те квадраты, которые закрашены не меньше, чем на 0,2, будут допустимыми. Остальные квадраты разбиения закрашены меньше, чем на 0,2, и всякий из них разобьем опять на четыре квадрата и т. д. После $(n-2)$-го разбиения получается некоторое число допустимых квадратов различных размеров и квадраты размером 2×2 (каждый из них закрашен меньше, чем на 0,8). Те из этих квадратов, которые содержат хотя бы одну черную клетку, уже закрашены на 0,25 и поэтому допустимы. Остальные квадраты размером 2×2 не содержат закрашенных клеток. Поэтому все черные клетки будут содержаться в допустимых квадратах и нужное покрытие будет осуществлено.

54. Найдем последовательно множества (все они являются прямыми): m_1 центров O; m_2 середин отрезков $[OA]$ — точек K; m_3 середин высот $[OL]$ равнобедренных треугольников AOC — точек P; m_4 середин отрезков $[OC]$ — точек M. Множество m_1 — прямая, которая проведена перпендикулярно отрезку $[AB]$ через его середину. Обозначим через D и E точки пересечения прямой m_1 соответственно

с прямой l и с перпендикуляром, восставленным к прямой l в точке A; через G — середину отрезка $[AE]$; через F и H — такие точки прямой l, что $|AF|=|FD|=|DH|$. После этого необходимо доказать следующие утверждения: 1) множество середин отрезков, у которых один конец неподвижен, а другой принадлежит данной прямой, есть прямая; 2) множество середин отрезков, параллельных заданному направлению с концами на двух данных прямых, есть прямая; 3) множество вторых концов отрезков, параллельных заданному направлению, первые концы и середины которых расположены на данных прямых, есть прямая.

55. Выпуклый двенадцатиугольник $A_1A_2\ldots A_{12}$ можно разрезать диагоналями на пять частей: восьмиугольник $A_1A_3A_4A_6A_7A_9A_{10}A_{12}$ и четыре треугольника. Всякая прямая пересекает не более двух из этих треугольников. В самом деле, прямая, пересекающая треугольник, пересекает по крайней мере одну из его сторон, общую с двенадцатиугольником. С другой стороны, прямая может пересекать не более двух не смежных сторон выпуклого многоугольника. Точно так же, если $A_1A_2\ldots A_{3n}$ — выпуклый $3n$-угольник, то всякая прямая пересекает не более двух из треугольников $A_1A_2A_3$, $A_4A_5A_6$, $A_7A_8A_9$, $A_{10}A_{11}A_{12}\ldots$, $A_{3n-2}A_{3n-1}A_{3n}$. Покажем, как можно разделить нужным образом данный правильный треугольник. Построим прямые, отсекающие три треугольника первого ранга так, чтобы остался правильный шестиугольник. От каждой вершины этого шестиугольника отсечем треугольник второго ранга так, чтобы остался правильный двенадцатиугольник. От каждой его вершины отсечем треугольник третьего ранга так, чтобы остался правильный двадцатичетырехугольник, и так поступим девятнадцать раз. После отрезания от вершин $3\cdot 2^{k-1}$—угольника $3\cdot 2^{k-1}$ треугольников k-го ранга остается правильный $3\cdot 2^k$-угольник ($k=1, 2, 3, \ldots, 19$). Всякая прямая пересекает не более двух треугольников каждого ранга и еще, возможно, оставшийся $3\cdot 2^{19}$-угольник, т. е. всего не более $1+2\cdot 19=39$ многоугольников. Общее число всех многоугольников, на которые разделен треугольник, равно $1+3+3\cdot 2+3\cdot 2^2+\ldots+3\cdot 2^{18}=1+3(2^{19}-1)>2^{20}=(2^{10})^2>1000^2$.

56. Нужно не менее 150 см проволоки. Согнуть каркас такой длины можно так: AA_1—A_1B_1—B_1A_1—A_1D_1—D_1C_1—C_1B_1—B_1D—DA—AB—BD_1—D_1B—BC—CC_1—C_1C—CD. Докажем, что из проволоки меньшей длины каркас куба сделать нельзя. Предположим, что можно гнуть проволоку только в вершинах куба и что какой-то каркас нами сделан, причем проволока начинается и кончается в вершинах куба. Подсчитаем число ребер в этом каркасе (будем считать не ребра куба, а ребра из проволоки). В каркасе есть ровно одна вершина, в которой проволока начинается, и одна, в которой проволока кончается (эти вершины могут, конечно, и совпадать). Назовем эти вершины концевыми, а все остальные — проходными. К каждой проходной вершине примыкает четное число ребер. В самом деле, проволока, войдя в эту вершину, обязательно должна из нее выйти. Поэтому к ней примыкает не менее четырех ребер. К концевой вершине примыкает не менее трех ребер. Поэтому всех ребер не менее чем $(6\cdot 4+2\cdot 3):2=15$. Действительно, каждое ребро примыкает к двум вершинам, поэтому если к вершине с номером k примыкает c_k ребер ($k=1, 2, \ldots, 8$), то $c_1+c_2+\ldots+c_8$ равно удвоенному числу ребер. Следовательно, в каркасе не менее 15 ребер. Длина каждого ребра 10 см. Поэтому потребуется не менее 150 см проволоки. Теперь остается только доказать, что если гнуть проволоку во внутренних точках ребер, то все равно менее чем из 150 см проволоки каркаса сделать нельзя. Эту задачу можно свести к предыдущей таким образом: не увеличивая длины проволоки, всякий каркас можно перестроить так, что все сгибы окажутся в вершинах.

57. Пусть a и b — длины сторон прямоугольников. На сторонах каждого из них лежат две точки пересечения с двумя соседними сторонами другого прямоугольника. (Если всего точек пересечения восемь, то на каждой стороне должно лежать не менее двух точек. Пересечение стороны одного прямоугольника с двумя параллельными сторонами невозможно.) Пусть A и C — точки, в которых пересекаются стороны различных прямоугольников, равные a; B и D — точки, в которых пересекаются стороны, равные b. Тогда отрезок $[AC]$ принадлежит биссектрисе

угла между сторонами длины a, которые проходят через точку A (для доказательства опустить на эти стороны перпендикуляр из точки C и исследовать пару образовавшихся при этом конгруэнтных треугольников). Луч $[BD]$ — биссектриса угла между сторонами длины b, проходящими через точку B. Таким образом, $[AC]\perp[BD]$. Поэтому площадь выпуклого четырехугольника с диагоналями $[AC]$ и $[BD]$ равна $0{,}5\ |AC|\cdot|BD|$. Так как $|AC|\geqslant b$ и $|BD|\geqslant a$, то даже эта площадь (и тем более вся площадь общей части прямоугольников) больше $0{,}5\ ab$.

58. Если прямая пересекает смежные стороны квадрата, то она делит его на пятиугольник и треугольник. По условию задачи каждая из девяти прямых делит квадрат на четырехугольники. Поэтому такая прямая пересекает две противоположные стороны квадрата. (Эта прямая делит квадрат на две трапеции или два прямоугольника.) Прямая делит среднюю линию квадрата в отношении $2:3$, так как отношение площадей этих трапеций равно отношению длин их средних линий (лежащих на средней линии квадрата). На средней линии квадрата есть две точки, которые делят ее длину в отношении $2:3$. Рассмотрев две другие противоположные стороны квадрата, получаем еще две точки на параллельной им средней линии. Таким образом, получаем, что каждая из девяти данных прямых проходит через одну из четырех указанных точек. Через одну из этих точек проходит не менее трех прямых, потому что если бы через каждую точку проходило не больше двух прямых, то всего было бы не больше $2\cdot 4=8$ прямых, а это противоречит условию задачи.

59. Очевидно, что если два круга пересекаются или касаются, то их можно заключить в один круг, диаметр которого не больше суммы диаметров данных кругов (утверждение 1). Строим круг радиуса a с центром в каждой из данных N точек (a несколько больше 0,5; точное значение a укажем ниже). Если среди этих кругов есть пересекающиеся, то, используя утверждение 1, заменяем какие либо два пересекающихся круга одним покрывающим их кругом. Если среди полученных кругов еще есть пересекающиеся, опять применим утверждение 1 и т. д. Пусть, вообще, есть какая-то система кругов, которые: а) покрывают все данные точки вместе с кругами радиуса a с центрами в этих точках и б) имеют сумму длин диаметров не больше $N\cdot 2a$. Тогда если среди них есть пересекающиеся, то воспользуемся утверждением 1 и построим новую систему из меньшего числа кругов, которая удовлетворяет тем же условиям «а» и «б». И так будем поступать до тех пор, пока не получится такая система из k кругов, никакие два из которых не пересекаются. Теперь уменьшим радиус каждого из этих k кругов на величину b, оставив их центры на месте (b больше 0,5 и меньше a; точное значение b укажем ниже). Тогда полученные k кругов: 1) содержат все данные точки; 2) имеют сумму диаметров не больше $N\cdot 2a-k\cdot 2b\leqslant 2Na-2b$; 3) отстоят друг от друга не меньше, чем на $2b$. Очевидно, что если выберем a и b так, чтобы были верны неравенства $b<a$, $2Na-2b<N$, $2b>1$, то все условия задачи будут выполнены. Достаточно, например, взять $a=0{,}5+0{,}5N$ и $b=0{,}5+0{,}25N$.

60. n^2-n+1. Раскрасим треугольники в шахматном порядке. Во всем треугольнике красных треугольников на n больше, чем белых (в каждом горизонтальном ряду красных на один больше), а в цепочке цвета должны чередоваться, поэтому красных треугольников может быть только на один больше, чем белых. Для того чтобы цепочка имела длину n^2-n+1, необходимо и достаточно, чтобы она начиналась в красных треугольниках и проходила через все без исключения белые треугольнички.

61. Поставим более общую задачу: какое наименьшее число граней может иметь многогранник, описанный около сферы радиуса r и полностью лежащий в концентрической с ней сфере радиуса $R>r$? Мы не знаем точного ответа на этот более общий вопрос, но докажем для числа граней некоторое неравенство, которое при $r=10$, $R=11$ показывает, что $N>22$. Этим самым будет доказано, что если в условии исходной задачи вместо девятнадцатигранника взять двадцатидвухгранник, то утверждение задачи останется верным. Итак, пусть N-гранник описан около сферы радиуса r и целиком принадлежит внутренней части шара радиуса R.

Рассмотрим какую-нибудь его грань. Проходящая через нее плоскость отсекает от сферы сегментную поверхность высоты $R-r$. Очевидно, что если построить сегментные поверхности для всех граней нашего многогранника, то их объединение покроет всю внешнюю сферу. Каждая из N сегментных поверхностей имеет высоту $R-r$, поэтому ее площадь $2\pi R(R-r)$. Сумма площадей всех сегментных поверхностей больше площади сферы. Поэтому $N\cdot 2\pi R(R-r)>4\pi R^2$. Отсюда $N>\frac{2R}{R-r}$. В частности, если $R=11$ и $r=10$, то $N>22$.

62. Допустим, что такое расположение семи точек и семи прямых существует. Докажем, что всякие две из данных точек принадлежат одной из данных прямых. В самом деле, если A — одна из этих точек, то через точку A проходят три прямые, и каждой из них принадлежит по две из данных точек (кроме A); тем самым точка A и всякая из шести точек (отличных от точки A) принадлежит одной из данных прямых. Теперь докажем, что всякие две из данных прямых пересекаются в одной из данных точек. Действительно, если a — одна из прямых, то через каждую из трех принадлежащих ей точек проходит по две прямые (кроме прямой a), и поэтому каждая из этих прямых пересекается с прямой a в одной из данных точек. Теперь рассмотрим выпуклую оболочку множества из семи данных точек — наименьшую выпуклую фигуру, которой принадлежат эти семь точек. Это будет некоторый выпуклый n-угольник, где $n\leqslant 7$. Очевидно, случай $n\geqslant 4$ невозможен, потому что на каждой стороне n-угольника должна быть еще одна третья точка, кроме вершин, а всего точек семь. Случай $n=3$, когда выпуклой оболочкой является некоторый треугольник ABC, также невозможен. В самом деле, если E и F — данные точки, которые принадлежат отрезкам $[AB]$ и $[BC]$, то данные прямые (EF) и (AC) должны пересекаться в одной из данных семи точек, а они будут пересекаться на продолжении отрезка $[AC]$, т. е. вне треугольника ABC. Полученное противоречие доказывает справедливость утверждения задачи.

63. Допустим, что сумма длин проведенных хорд не меньше πk. Тогда сумма длин малых дуг окружности, стягиваемых этими хордами, больше πk. Добавим к этим дугам дуги, симметричные им относительно центра окружности. Сумма длин всех дуг больше $2\pi k$. Поэтому существует точка окружности, принадлежащая хотя бы $k+1$ дуге (длина окружности равна 2π). Если проведем диаметр через эту точку, то он пересечет по крайней мере $k+1$ хорду.

64. б) Допустим, что в многогранник вписывается шар. Отметим на каждой его грани точку касания с шаром и проведем из нее отрезки к вершинам этой грани. После этого грань будет разделена на треугольники. К каждому ребру многогранника прилегает два таких треугольника, лежащих в смежных гранях. Они конгруэнтны по трем сторонам. По условию задачи к каждому ребру примыкает не более одной черной грани. Итак, к каждому черному треугольнику примыкает конгруэнтный ему белый треугольник. (К белому треугольнику тоже может примыкать белый. Но важно только, что различным черным треугольникам соответствуют различные белые.) Следовательно, сумма площадей черных граней не больше суммы площадей белых граней. Задача а) решается аналогично.

65. Три «средние плоскости» искомого параллелепипеда (плоскости, равноудаленные от всех восьми его вершин) должны удовлетворять следующим требованиям: 1) каждая из них равноудалена от данных четырех точек; 2) все три плоскости пересекаются в одной точке. Обратно, если существует тройка плоскостей, которые удовлетворяют условиям 1 и 2, то параллелепипед, для которого они являются «средними плоскостями», определяется однозначно: достаточно через четыре данные точки провести все различные плоскости, параллельные каждой плоскости из этой тройки,— и параллелепипед будет построен. Установим, сколько существует плоскостей Π, равноудаленных от четырех данных точек A, B, C, M, не принадлежащих одной плоскости. Таких плоскостей семь. В самом деле, достаточно указать, какие точки лежат по одну сторону плоскости Π, а какие — по другую. Возможно, что по одну сторону будет три точки, а по другую — одна (че-

тыре плоскости), а возможно, что по обе стороны будет по две точки (три плоскости). Очевидно, как строить эти семь плоскостей: все они пересекают ребра треугольной пирамиды $ABCM$ в серединах, а ее грани — по средним линиям (четыре плоскости пересекают пирамиду по треугольнику, а три — по параллелограмму). Три плоскости из семи можно выбрать $C_7^3=35$ способами. Каждая из этих троек удовлетворяет условию 1. Установим, сколько из этих троек плоскостей не удовлетворяет условию 2, т. е. параллельных одной прямой. Прямая пересечения каждых двух из семи плоскостей либо проходит через середины двух противоположных ребер треугольной пирамиды $ABCM$ (таких случаев всего три — пересечение двух плоскостей), либо параллельна одному из ребер этой пирамиды (причем каждому ребру параллельны три из семи плоскостей). Таким образом, троек плоскостей, не удовлетворяющих условию 2, столько же, сколько ребер у треугольной пирамиды. Итак, 35—6=29.

ЛИТЕРАТУРА

Александров И. И. Сборник геометрических задач на построение. М., Учпедгиз, 1954.
Антонов Н. П. и др. Сборник задач по элементарной математике. М., «Наука», 1968.
Аргунов Б. И., Балк М. Б. Элементарная геометрия. М., «Просвещение», 1966.
Атанасян Л. С. и др. Сборник задач по элементарной геометрии. М., «Просвещение», 1964.
Блох А.Ш., Трухан Т. Л. Неравенства. Минск, «Народная асвета», 1972.
Болтянский В. Г. и др. Лекции и задачи по элементарной математике. М., «Наука», 1971.
Василевский А. Б. Методы решения геометрических задач. Минск, «Вышэйшая школа», 1969.
Делоне Б. Н., Житомирский О. К. Задачник по геометрии. М.—Л., ГИТТЛ, 1949.
Дорофеев Г. В., Потапов А. М., Розов Н. Х. Пособие по математике для поступающих в вузы. М., «Наука», 1970.
Кречмар В. А. Задачник по алгебре. М., «Наука», 1964.
Лидский В. Б. и др. Задачи по элементарной математике. М., «Наука», 1969.
Ляпин С. Е., Баранова И. В., Борчугова З. Г. Сборник задач по элементарной алгебре. М., «Просвещение», 1973.
«Математика в школе», 1945—1973 гг. «Квант», 1970—1973 гг.
Моденов П. С. Сборник задач по специальному курсу элементарной математики. М., «Высшая школа», 1960.
Морозова Е. А., Петраков И. С. Международные математические олимпиады. М., «Просвещение», 1971.
Невяжский Г. А. Неравенства. М., Учпедгиз, 1947.
Новоселов С. И. Обратные тригонометрические функции. М., «Высшая школа», 1956.
Новоселов С. И. Специальный курс тригонометрии. М., «Высшая школа», 1967.
Новоселов С. И. Специальный курс элементарной алгебры. М., «Высшая школа», 1965.
Перепелкин Д. И. Курс элементарной геометрии. М., Гостехиздат, 1949.
Пойа Д. Как решать задачу. М., Учпедгиз, 1959.
Пойа Д. Математическое открытие. М., «Наука», 1970.
Сивашинский И. Х. Неравенства в задачах. М., «Наука», 1967.
Скопец З. А., Жаров В. А. Задачи и теоремы по геометрии (планиметрия). М., Учпедгиз, 1962.
Саминский И. С. Элементарная алгебра. М., «Наука», 1967.
Шклярский Д. О., Ченцов Н. Н., Яглом И. М. 1. Избранные задачи и теоремы элементарной математики. 2. Избранные задачи и теоремы планиметрии. 3. Избранные задачи и теоремы элементарной математики (стереометрия). М.—Л., ГИТТЛ, 1954.
Четверухин Н. Ф. Методы геометрических построений. М., Учпедгиз, 1952.
Яглом И. М. Геометрические преобразования, ч. 1 и 2. М., ГИТТЛ, 1955, 1956.

Василевский Александр Борисович.
МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Редактор *А. А. Белянкина*
Обл. худож. *Ю. Г. Сергиенко*
Худож. редактор *Г. И. Важнов*
Техн. редактор *П. В. Фрайман*
Корректоры *Ж. И. Маркевич, Э. Н. Капрова*

АТ 11599. Сдано в набор 19/IV 1974 г. Подписано к печати 25/IX 1974 г. Бумага $60\times84^1/_{16}$ типогр. № 1. Печ. л. 15(13,95). Уч.-изд. л. 15. Изд. № 72-128. Заказ 956. Тираж 1000 экз. Цена 63 коп.

Издательство «Вышэйшая школа» Государственного комитета Совета Министров БССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. Редакция литературы по математике, физике и энергетике. 220600. Минск, ул. Кирова, 24.

Ордена Трудового Красного Знамени типография издательства ЦК КП Белоруссии. Минск, Ленинский проспект, 79.

Василевский А. Б.

В 19 Методы решения задач. Минск, «Вышэйшая школа», 1974.

240 с. с ил.

В пособии рассматриваются общие и частные методы решения задач. Особое внимание уделяется функциональному подходу к решению уравнений, неравенств, доказательству тождеств и к другим задачам. Показано применение производной к исследованию решений уравнений, неравенств и т. д.

Приводятся упражнения для самостоятельного решения. Система упражнений направлена на обучение студентов исследовательскому подходу к решению задач. Упражнения снабжены ответами, указаниями или решениями.

Учебное пособие для студентов математических специальностей пединститутов. Может быть использовано при проведении практикумов по решению задач, семинаров по методам решений задач элементарной математики, факультативных и кружковых занятий в школе.

В $\frac{0222-134}{M304(05)-74}$ 18—14 51